Topologie, espaces de fonctions

Université d'Évry-Val d'Essonne/ENSIIE, L3 mathématiques

Gilles Lacombe

Table des matières

Planning prévisionnel approximatif

1. Exemples d'espaces vectoriels normés.
2. Exemples d'espaces vectoriels normés, suite. Exercices.
3. Exemples d'espaces vectoriels normés, suite. Exercices.
4. Espaces L^p.
5. Espaces L^P, exercices.
6. Densité, séparabilité, exercices.
7. Compacité : propriété de Borel-Lebesgue.
8. Compacité : th. de Bolzano-Weierstrass.
9. Compacité : th. de Heine, exercices.
10. Compacité : exercices.
11. Compacité : théorème de Fejér.
12. Suites de Cauchy, espaces complets, premiers exemples.
13. Espaces complets, exercices.
14. Séries dans les espaces de Banach. Algèbre $C(K)$, K compact.
15. Séries dans les espaces de Banach, espaces L^p, exercices.
16. Espaces de Banach, exercices.
17. Théorème du point fixe, exemples et exercices en dimension finie.
18. Théorème du point fixe, exemples et exercices en dimension infinie.
19. Espaces de Hilbert, introduction.
20. Théorème de projection.
21. suite
22. Bases hilbertiennes.
23. suite

Sous sa forme écrite, ce cours reprend toutes les notions de topologie métrique depuis le début. Toutefois, comme il s'adresse à des étudiants qui, en principe, en connaissent déjà les notions de base (notions de base qui ne seront revues que très succintement dans la présentation orale), on s'est parfois permis de faire allusion, voire d'utiliser dans des exemples, des résultats connus en deuxième année de licence et qui ne sont revus que plus tard dans le déroulement de ce cours. Le lecteur pourra vérifier que cela n'entraîne pas de boucle infinie dans les démonstrations.

1. Espaces métriques : définition, exemples

Ce premier chapitre recense les principaux espaces vectoriels normés qu'un étudiant de deuxième année a, en principe, déjà rencontrés. Ces exemples sont à connaître et à savoir manipuler car ils seront utilisés très fréquemment par la suite.

1.1. Distances, normes

Définition 1.1 (Fréchet, 1905 ; Hausdorff, 1914) *Soit E un ensemble.*

Une **distance sur** *E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$ (propriété de* symétrie*) et $d(x,x) = 0$.*
2. Inégalité triangulaire *: si $x, y, z \in E$, alors $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*
3. Propriété de séparation *: si $x, y \in E$ et si $d(x,y) = 0$, alors $x = y$.*

Un **espace métrique** est la donnée d'un ensemble E et d'une distance d sur E (Hausdorff, 1914).

Exemple fondamental : la distance associée à une norme

Définition 1.2 *Supposons que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une* **norme sur** *E est une application $x \mapsto \|x\|$, de E dans $\mathbb{R}^+$, qui satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (la norme est dite* positivement homogène*).*
2. Inégalité triangulaire *: si $x, y \in E$, alors $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*
3. Propriété de séparation *: si $x \in E$ et si $\|x\| = 0$, alors $x = 0$.*

Une application qui satisfait les propriétés **1** *et* **2** *mais pas forcément* **3** *est appelée une* **semi-norme sur** *E.*

Un **espace vectoriel normé** est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\| \cdot \|$ sur E.

La **distance associée à la norme** $\| \cdot \|$ est l'application d définie par $d(x,y) = \|x - y\|$. Il est aisé de vérifier que d est bien une distance si $\| \cdot \|$ est une norme.

1.2. Exemples d'espaces vectoriels normés

Norme naturelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ La norme naturelle sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue. Dans toute la suite, en l'absence d'indication contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette norme et de la distance qu'elle définit.

La norme naturelle sur $\mathbb{C}$ est le module : si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Norme définie par un produit scalaire ou un produit hermitien Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni,

- *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto (x|y)$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les deux propriétés suivantes :
  1. Pour tout $x \in E$, $(x|x) \in \mathbb{R}^+$;
  2. Pour tout $x \in E$, $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'un produit hermitien, c'est-à-dire d'une forme sesquilinéaire anti-symétrique $(x, y) \mapsto (x|y)$ de E^2 dans $\mathbb{C}$ qui satisfait les deux mêmes propriétés **1** et **2**.

Par exemple, la relation $(x|y) = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ définit sur $\mathbb{R}^d$ un produit scalaire, appelé le *produit scalaire canonique dans* $\mathbb{R}^d$. De même, la relation $(x|y) = \sum_{j=1}^{d} x_j \overline{y_j}$ définit sur $\mathbb{C}^d$ un produit hermitien, appelé le *produit hermitien canonique dans* $\mathbb{C}^d$.

La norme associée à un produit scalaire ou hermitien $\| \ \|$ est définie par la relation

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'inégalité triangulaire pour cette norme découle de l'inégalité de Schwarz, rappelée ici.

Proposition 1.3 (Inégalité de Schwarz) *Pour tous $x, y \in E$ on a*

$$|(x|y)| \leq \|x\| \ \|y\|.$$

La démonstration est détaillée à la page 74.

Il est aisé de déduire de ceci que l'application $\| \ \|$ satisfait bien l'inégalité triangulaire : il suffit de constater que, si $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}(x|y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \ \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Les espaces préhilbertiens seront étudiés en détails au chapitre 5..

Exemples de normes dans $\mathbb{K}^n$ Soit $p \in [1, \infty[$. Dans l'espace de dimension finie $\mathbb{K}^n$, on définit la norme $\|x\|_p$ d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

(Si $p = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît la *norme euclidienne canonique* dans $\mathbb{R}^n$.) L'inégalité triangulaire pour cette norme a pour nom l'*inégalité de Minkowski.* Cette inégalité peut se déduire de l'*inégalité de Hölder.*

Proposition 1.4 (Inégalité de Hölder) *Soient p et q des réels tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous éléments $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^n$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Dans le cas $p = q = 2$, on reconnaît l'inégalité de Schwarz.

Démonstration de l'inégalité de Hölder. Il s'agit d'une inégalité de convexité classique, qui utilise simplement la concavité du logarithme. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, pour tous réels a et b strictement positifs, on a

$$\frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b \leq \log \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right).$$

En prenant l'exponentielle de cette inégalité, on obtient

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Soient maintenant x et y deux éléments de $\mathbb{K}^n$. Pour chaque entier $j \in [1, n]$, appliquons l'inégalité ci-dessus aux réels

$$a = \frac{|x_j|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \qquad b = \frac{|y_j|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}.$$

On obtient

$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

En sommant maintenant ces inégalités, pour j entre 1 et n, il vient

$$\frac{\sum_{j=1}^n |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui est exactement l'inégalité de Hölder.

Démonstration de l'inégalité de Minkowski. Nous utilisons l'inégalité de Hölder. Soient à nouveau x et y deux éléments de $\mathbb{K}^n$. On a

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Appliquons ensuite l'inégalité de Hölder à chacun des deux termes à droite de cette inégalité. Nous obtenons, pour le premier,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1},$$

et, de même,

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

Par conséquent,

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p-1}$$

et donc $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Norme $\| \|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$ Il est aisé de vérifier que la relation

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Espaces de suites : les espaces ℓ^p, $p \in [1, +\infty]$ Soit $p \in [1, \infty]$. Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, on note, si $p < \infty$,

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p}$$

ainsi que

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

On définit alors l'espace ℓ^p comme l'ensemble des suites u pour lesquelles la quantité $\|u\|_p$ est finie. Si u, v sont deux éléments de ℓ^p, on vérifie que $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ en utilisant si $p < \infty$ l'inégalité de Minkowski et un passage à la limite. Cette inégalité permet de montrer d'une part que ℓ^p est un espace vectoriel, et d'autre part que $\| \|_p$ est une norme sur cet espace.

Espaces de fonctions bornées. Norme de la convergence uniforme Soit E un ensemble (quelconque) et soit $(F, \| \|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$. Une application f de E dans F est dite *bornée* s'il existe un réel $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M$, pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{F}_b(E, F)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ formé des applications bornées de E dans F. On définit sur cet espace vectoriel la *norme uniforme,* appelée encore *norme de la convergence uniforme,* définie par $\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$. La norme sur F et la norme sur $\mathcal{F}_b(E, F)$ sont notées de la même façon car il n'y a pas de risque de confusion. Remarquons que si $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{K}$, l'espace $\mathcal{F}_b(E, F)$ n'est autre que l'espace normé ℓ^∞, et la norme uniforme, la norme $\| \|_\infty$.

Espaces de fonctions continues Soit E un espace métrique. Nous voyons ici des sous-espaces de $\mathcal{F}_b(E, \mathbb{K})$ formés de fonctions continues, que nous aurons l'occasion de rencontrer à nouveau dans les chapitres suivants.

- On note $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ l'espace vectoriel normé formé des fonctions continues et bornées de E dans $\mathbb{K}$, que l'on munit de la norme uniforme. Plus généralement, on note $C_b(E, F)$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues de E dans un espace vectoriel normé F, que l'on munit également de la norme uniforme.
- Une fonction f de E dans $\mathbb{K}$ est dit à support compact s'il existe un compact K de E telle que, pour tout $x \notin K$, $f(x) = 0$. Toute fonction continue définie sur un compact étant bornée, on voit simplement que l'ensemble des fonctions continues à support compact de E dans $\mathbb{K}$, qui se note $C_c^{\mathbb{K}}(E)$, est un sous-espace vectoriel de $C_b^{\mathbb{K}}(E)$.
  Nous reviendrons sur la notion de compacité au chapitre 3.
- On dit qu'une fonction f de E dans $\mathbb{K}$ *tend vers* 0 *à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de E tel que, pour tout $x \notin K$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. On note $C_0^{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble formé des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ qui tendent vers 0 à l'infini. On pourra vérifier à titre d'exercice que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ et que :
$$C_c^{\mathbb{K}}(E) \subset C_0^{\mathbb{K}}(E) \subset C_b^{\mathbb{K}}(E).$$
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $C_a^{\mathbb{K}}$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues et a-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ étant bornée (pourquoi ?), on a : $C_a^{\mathbb{K}} \subset C_b^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$.

Espaces L^p de Lebesgue, $p \in [1, +\infty]$ Soit m une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et soit $p \in [1, +\infty]$.

- Si $p < +\infty$, on note $\mathcal{E}_p = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(m)$ l'espace des fonctions f de Ω dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$-mesurables telles que f^p est intégrable, c'est-à-dire telles que $\int |f|^p dm < +\infty$. Si $f \in \mathcal{E}_p$, on note alors :
$$N_p(f) = \left(\int |f|^p \, dm \right)^{1/p}.$$
- Si $p = +\infty$, on note $\mathcal{E}_p = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^\infty(m)$ l'espace des fonctions f de Ω dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$-mesurables, pour lesquelles il existe un réel $C > 0$ et une partie m-négligeable A de Ω tels que $|f| \leq C$ sur $\Omega \setminus A$. Si $f \in \mathcal{E}_p$, on note alors :
$$N_\infty(f) = \inf \{C > 0 \text{ t.q. } \ m(\{x \in \Omega \ ; \ |f(x)| > C\}) = 0\}.$$
  Cette quantité $N_\infty(f)$ s'appelle le *supremum essentiel* de la fonction f.

Proposition 1.5 (Inégalité de Hölder) *Soient p et q des réels tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour toutes fonctions f, g de Ω dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$-mesurables, on a :*
$$\int |fg| dm \leq \left(\int |f|^p \, dm \right)^{1/p} \left(\int |f|^q \, dm \right)^{1/q}.$$

Noter que les intégrales de fonctions positives qui apparaissent dans cette inégalité peuvent être infinies. La démonstration, semblable au cas discret évoqué pour les espaces ℓ^p est laissée comme exercice. Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de Minkowski :

Proposition 1.6 (Inégalité de Minkowski) *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soient f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$-mesurables. Alors :*

$$\left(\int |f+g|^p \ dm\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \ dm\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \ dm\right)^{1/p}.$$

(Pour $p = 1$, cette inégalité est évidente.)

De ceci, nous pouvons déduire :

Proposition 1.7 *Soit $p \in [1, +\infty]$. Quels que soient $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$, on a : $f + g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ et :*

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

(Pour $p = +\infty$, cette propriété est simple à vérifier directement.) Nous voyons ainsi que, d'une part, l'ensemble $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ (la stabilité par produit par un scalaire est immédiate) et, d'autre part, que l'application N_p vérifie l'inégalité triangulaire dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$. Elle est de plus positivement homogène (c'est immédiat). En revanche, elle n'a pas, en général, la propriété de séparation. En effet, pour $p < +\infty$, on a l'équivalence suivante :

$$\text{(1)} \qquad N_p(f) = 0 \Leftrightarrow \int |f|^p \ dm = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \ \ m\text{−p.p.} \ \Leftrightarrow f = 0 \ \ m\text{−p.p.}$$

Et, pour $p = \infty$, on a :

$$\text{(2)} \qquad N_\infty(f) = 0 \Leftrightarrow m(\{x \in \Omega \ ; \ |f(x)| > 0\}) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \ m\text{−p.p.}$$

On note $L^p_{\mathbb{K}}(m)$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ dans lequel on « identifie » les fonctions qui sont égales m-presque partout (en toute rigueur, $L^p_{\mathbb{K}}(m)$ est l'espace quotient de $\mathcal{E}$ par la relation d'égalité m-presque partout). Dans cet espace $L^p_{\mathbb{K}}(m)$, les deux affirmations « $f = 0$ m-p.p. » et « $f = 0$ » sont équivalentes, de sorte que l'application N_p est bien une norme dans $L^p_{\mathbb{K}}(m)$ †.

Remarque Si $\Omega = \mathbb{N}$ et si m est la mesure de comptage, définie par : $m(A) = \text{card}\,(A)$, l'espace $\mathcal{L}^p(m)$ n'est autre que ℓ^p. Comme, dans ce cas, le seul ensemble de mesure nulle est l'ensemble vide, il vient que $\mathcal{L}^p(m) = L^p(m)$.

†. Encore faut-il vérifier que l'on puisse bien parler de $N_p(f)$ avec $f \in L^p_{\mathbb{K}}(m)$. Il faut pour cela que la valeur de $N_p(f)$ ne change pas si l'on remplace f par une fonction qui lui est égale m-presque partout. En d'autre termes, il faut vérifier que, quels que soient $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$, on a : $f = g$ m-p.p. $\Rightarrow N_p(g) = N_p(g)$, ce qui est une conséquence directe des équivalences (1) et (2).

Exercices

1. a. Soient p, q, r trois réels supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Démontrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $fg \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

b. Soit f une fonction $\mathcal{F}$-mesurable de X dans $\mathbb{K}$. Démontrer que l'ensemble J défini par

$$J = \left\{ p \in [1, +\infty[\ \text{ t.q. } \ 0 < \int |f|^p dm < +\infty \right\}$$

est un intervalle (éventuellement vide).

Indication. Si $r \in [p, q]$ et si $f \in L^p \cap L^q$, introduire le réel $x \in [0, 1]$ tel que $1/r = (x/p) + (1 - x)/q$.

c. On suppose que l'espace $(X, \mathcal{F})$ est $\mathbb{N}$ muni de la tribu discrète et que m est la mesure de comptage. Démontrer que, si J n'est pas vide, alors il n'est pas borné.

d. On suppose que la mesure m est finie. Démontrer que, si J n'est pas vide, alors il contient le réel 1.

e. On suppose que l'espace $(X, \mathcal{F})$ est $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et que m est la mesure de Lebesgue. Déterminer, pour chaque $p \in [1, \infty]$, un élément de L^p qui n'appartient à aucun L^q, $q \neq p$.

f. Démontrer que l'application de J dans $\mathbb{R}$ définie par

$$p \mapsto \log \left(\int |f|^p dm \right)$$

est une fonction convexe.

g. Démontrer que pour tout $q \in [1, \infty[$,

$$L^q \cap L^\infty \subset \bigcap_{q \leq p \leq \infty} L^p$$

et que, pour tout $f \in L^q \cap L^\infty$,

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Indication. Démontrer que si $0 < a < \|f\|_\infty$, alors

$$a \leq \liminf_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

2. Soit $p \in]1, \infty[$ et soit p' l'exposant conjugué de p. Soit également K une fonction borélienne sur $]0, +\infty[^2$ à valeurs positives satisfaisant les hypothèses suivantes :
– $\forall x, y, z \in]0, +\infty[$, $xK(xy, xz) = K(y, z)$;
– $\displaystyle\int_0^{+\infty} K(1, z) z^{-1/p} dz = k < +\infty$.

a. Démontrer que $\int_0^{+\infty} K(z, 1) z^{-1/p'} dz = k$.

b. Démontrer que la relation

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} K(x, y) f(y) dy$$

définit un opérateur linéaire continu de $L^p(]0, +\infty[)$ dans lui-même, de norme inférieure ou égale à k.
Indication. Majorer tout d'abord $|Tf(x)|$ en écrivant

$$K(x, y) = K(x, y)^{1/p} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/pp'} K(x, y)^{1/p'} \left(\frac{x}{y}\right)^{1/pp'}$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder.

c. On suppose de plus que $K(1, z) \leq 1$ pour tout $z > 0$. Si $\varepsilon > 0$, on pose

$$k_\varepsilon = \int_0^{+\infty} K(1, z) z^{-(1+\varepsilon)/p} dz,$$

$$f_\varepsilon(x) = 1_{\{x \geq 1\}} x^{-(1+\varepsilon)/p}, \qquad g_\varepsilon(x) = 1_{\{x \geq 1\}} x^{-(1+\varepsilon)/p'}.$$

Vérifier que $f_\varepsilon \in L^p(]0, +\infty[)$, $g_\varepsilon \in L^{p'}(]0, +\infty[)$, puis démontrer que pour tout $\varepsilon < p/2p'$,

$$\int_0^{+\infty} Tf_\varepsilon(x) g_\varepsilon(x) dx \geq \left(k_\varepsilon - 2(p')^2 \varepsilon\right) \|f_\varepsilon\|_p \|g_\varepsilon\|_{p'}.$$

En déduire que $\|T\| = k$.

d. Démontrer que les applications K définies par $K(x, y) = 1/(x + y)$ et $K(x, y) = 1/\max(x, y)$ satisfont les hypothèses ci-dessus pour tout $p \in]1, +\infty[$ et calculer dans ces deux cas la norme de l'opérateur T correspondant. On rappelle que si $\alpha > 1$, $\int_0^{+\infty} dx/(1 + x^\alpha) = \pi/\alpha \sin(\pi/\alpha)$.

Espaces d'applications linéaires bornées Soient E et F deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$, de normes respectives $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$. Une application linéaire T, de E dans F, est dite *bornée* si la quantité

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F, \text{ avec } x \in E \text{ et } \|x\|_E \leq 1\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

est finie.

On sait (proposition 2.23, p. 27) qu'une application linéaire est bornée si et seulement si elle est continue et que, de plus, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est bornée (corollaire 3.15, p. 41).

On note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de E dans F. On vérifie aisément que l'application $\| \ \|$ est une norme sur $L(E, F)$.

Le dual topologique d'un espace vectoriel normé Dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, l'espace normé $L(E, F)$ s'appelle le *dual topologique* de E. On le note souvent E'. C'est donc l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E, muni de la norme $\| \ \|$ définie par (par exemple) :

$$\|f\| = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Normes matricielles Soit $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel formé des matrices $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Une telle matrice pouvant être considérée de façon canonique comme une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même, on peut assimiler $M_n(\mathbb{K})$ à $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ et définir dans $M_n(\mathbb{K})$ des normes comme il a été fait plus haut : à toute norme $\| \ \|$ dans $\mathbb{K}^n$, on associe la norme dans $M_n(\mathbb{K})$, également notée $\| \ \|$, définie par :

$$\|M\| = \sup\{\|Mx\|, \text{ avec } x \in \mathbb{K}^n \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}.$$

Cette norme s'appelle la *norme matricielle subordonnée* à la norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{K}^n$. Remarquons qu'elle satisfait de plus l'inégalité suivante :

$$\forall M, N \in M_n(\mathbb{K}) \qquad \|MN\| \leq \|M\| \, \|N\|.$$

Exercices

1. Soit $a \in [0, 1]$. Si $f \in C_{\mathbb{K}}([0, 1])$, on note $L(f) = f(a)$. Démontrer que ceci définit une application linéaire L de $C_{\mathbb{K}}([0, 1])$ dans $\mathbb{K}$. Cette application est-elle continue si l'on munit l'espace $C_{\mathbb{K}}([0, 1])$ de la norme uniforme ? de la norme $\| \ \|_1$? Dans l'affirmative, préciser la valeur de la norme de T.

2. Si $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note :

$$\|P\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

- **a.** Démontrer que cette relation définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
- **b.** Soit $a \in \mathbb{C}$. L'application linéaire $P \mapsto P(a)$, de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$, est-elle continue si $\mathbb{K}[X]$ est muni de cette norme ?

c. Même question pour l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même définie par : $P \mapsto P'$.

d. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

est-elle de Cauchy dans l'espace $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\| \ \|$? Est-elle convergente ?

3. Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, on définit la fonction Tf, sur l'intervalle $[0,1]$, par :

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{f(tx)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

a. Vérifier que Tf est continue sur $[0,1]$.

b. Vérifier que l'application T ainsi définie est une application linéaire continue dans l'espace $E = C([0,1])$ muni de la norme uniforme. Calculer la norme de T dans $L(E)$.

4. Soit K une fonction continue bornée sur $[0,1]^2$ et soit T l'application de $C([0,1])$ (muni de la norme uniforme) dans lui-même définie par :

$$T(f)(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy.$$

a. Démontrer que T est une application linéaire continue et donner une majoration de sa norme.

b. Démontrer que pour tout entier positif n et pour tout $f \in C([0,1])$,

$$|T^n f(x)| \leq \|f\|\, \|K\|^n \frac{x^n}{n!}$$

(où $\|\,.\,\|$ désigne la norme uniforme dans $C([0,1])$ et $C([0,1]^2)$).

c. Démontrer que pour n assez grand, T est une contraction.

5. Si f est une fonction continue sur $[-1,1]$, on définit le réel Tf par :

$$Tf = \int_0^1 f(t)\, dt - \int_{-1}^0 f(t)\, dt.$$

Démontrer que l'application T ainsi définie est une forme linéaire continue sur $E = C([-1,1])$ muni de la norme uniforme. Déterminer la norme de T dans E'. Indication : on pourra considérer les fonctions f_n définies sur $[-1,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq -1/n \\ nx & \text{si} \quad x \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1/n. \end{cases}$$

6. Soit A une matrice 2×2 à coefficients complexes. On note $\rho(A)$ le module de sa valeur propre de plus grand module.

a. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{C}^2$. On note également $\| \ \|$ la norme qu'elle définit dans l'espace $M_2(\mathbb{C})$: si $M \in M_2(\mathbb{C})$,

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^2, x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}.$$

Démontrer que $\|A\| \ \geq \rho(A)$.

b. On veut démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme sur $\mathbb{C}^2$ pour laquelle $\|A\| \ \leq \rho(A) + \varepsilon$. (Cette norme pourra dépendre de A et de ε.) Pour cela, on fixe un réel $\varepsilon > 0$ et l'on procède de la manière suivante :

i. Soit x_1 un vecteur propre non nul de A et soit x_2 un élément de $\mathbb{C}^2$ tel que (x_1, x_2) forme une base de $\mathbb{C}^2$ (Pourquoi de tels x_1 et x_2 existent-ils ?). Déterminer une matrice inversible U telle que la matrice $U^{-1}AU$ soit triangulaire.

ii. Pour chaque $\delta > 0$, on définit la matrice diagonale D_δ suivante :

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Calculer les coefficients de la matrice $(UD)^{-1}A(UD)$ en fonction de ceux de la matrice $U^{-1}AU$.

iii. Démontrer que si δ est suffisamment petit, on a : $\|(UD)^{-1}A(UD)\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$. On choisit un tel δ dans la suite.

iv. Si $x \in \mathbb{C}^2$, on définit :

$$\|x\| = \|(UD_\delta)^{-1}x\|_\infty.$$

Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{C}^2$ et que cette norme définit une norme sur $M_2(\mathbb{C})$ pour laquelle

$$\|A\| \ = \|(UD)^{-1}A(UD)\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

c. Il sera revu au chapitre 3 que dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, la convergence d'une suite de $\mathbb{C}^2$ vers 0 ne dépend pas de la norme considérée.

Démontrer l'équivalence suivante :

$$\left(\forall x \in \mathbb{C}^2 \ \lim_{n \to \infty} A^n x = 0\right) \iff \rho(A) < 1.$$

2. Le vocabulaire de base de la topologie

Ce chapitre de rappels reprend le programme de topologie de deuxième année, en y ajoutant quelques compléments, notamment sur la notion de séparabilité.

2.1. Ouverts, fermés Dans ce qui suit, on considère un espace métrique (E, d).

Boules ouvertes, boules fermées Si $x \in E$ et si r est un réel positif ou nul, on note $B(x, r) = \{y \in E \ ; \ d(x, y) < r\}$ et $\bar{B}(x, r) = \{y \in E \ ; \ d(x, y) \leq r\}$. L'ensemble $B(x, r)$ s'appelle la *boule ouverte de centre x et de rayon r,* et $\bar{B}(x, r)$ s'appelle la *boule fermée de centre x et de rayon r.*

Exemples (exercices) **a.** Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les boules de centre 0 et de rayon 1 correspondantes aux distances définies par les trois normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$.

b. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Caractériser graphiquement les fonctions $g \in C^{\mathbb{R}}([0, 1])$ qui appartiennent à la boule de centre f et de rayon 1, dans l'espace $E = C^{\mathbb{R}}([0, 1])$, muni de la (distance définie par la) norme uniforme.

Voisinage d'un point Soit $x \in E$. Une partie A de E est un *voisinage* de x si elle contient au moins une boule ouverte non vide de centre x.

Exemple La boule $\bar{B}(0, 1)$ définie par la norme euclidienne $\| \ \|_2$ de $\mathbb{R}^2$ est un voisinage du point $(1/2, 1/2)$ mais pas du point $(1, 0)$.

Ensemble ouvert Un *ouvert* de E est une partie de E qui est voisinage de chacun de ses points. En d'autres termes, A est un ouvert de E si $A \subset E$ et si, pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

Exemples (exercices) Toute boule ouverte est un ouvert (utiliser l'inégalité triangulaire). Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (pour sa distance naturelle).

Proposition 2.1 *Toute intersection finie d'ouverts est un ensemble ouvert. Toute réunion quelconque d'ouverts est un ensemble ouvert.*

Démonstration. Soient $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts de E et soit U leur intersection. Si $x \in U$, alors x appartient à tous les U_j et donc tout U_j est un voisinage de x. Pour chaque $j \leq k$, on peut donc choisir $r_i > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset U_j$. Alors la boule ouverte de centre x et de rayon $r = \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$ est contenue dans U. Donc U est ouvert.

Soit maintenant $(U_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de E et soit U leur réunion. Si $x \in U$, alors x appartient au moins à l'un des ouverts U_j. Cet ouvert est un voisinage de x donc l'ensemble U qui le contient en est un aussi. Donc U est un voisinage de chacun de ses points ; c'est donc un ensemble ouvert. □

Exemple Si $I_n =]1/3n, 1/2 + 1/n[$, alors l'ensemble $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n =]0, 3/2[$ est bien un ouvert. Par contre, l'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n =]1/3, 1/2]$ n'est pas ouvert car il n'est pas un voisinage de $1/2$.

Ensemble fermé Une partie de E est dite *fermée* si son complémentaire est ouvert.

Exemples (exercices) Toute boule fermée est un fermé. Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (pour sa distance naturelle).

Proposition 2.2 *Toute intersection de fermés est un ensemble fermé. Toute réunion finie de fermés est un ensemble fermé.*

Il suffit pour s'en convaincre de passer au complémentaire dans la proposition 2.1.

Intérieur

- Un point x est dit *intérieur* à une partie A de E si A est un voisinage de x, c'est-à-dire s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- L'*intérieur* d'une partie A de E est l'ensemble des points intérieurs à A :

$$x \in \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow \exists r > 0 \;\; B(x, r) \subset A.$$

Proposition 2.3 *Soit A une partie de E. L'intérieur de A est un ensemble ouvert. Plus précisément, c'est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Démonstration. Vérifions que l'intérieur de A est ouvert. Si x est un point intérieur à A, alors par définition il existe une boule ouverte non vide $B = B(x, r)$ qui est contenue dans A. Or cette boule est un ensemble ouvert, et par conséquent un voisinage de chacun de ses points. Donc tout point de B est intérieur à B, et donc à A puisque $B \subset A$. En d'autres termes, $B(x, r) \subset \mathrm{Int}\, A$. Donc A est ouvert.

Soit maintenant U un ouvert de E contenu dans A et soit $x \in U$. L'ensemble U étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ et donc tel que $B(x, r) \subset A$. Par conséquent, $x \in \mathrm{Int}\, A$ et $U \subset \mathrm{Int}\, A$. □

La proposition ci-dessus entraîne simplement les deux faits suivants :

1. Une partie de E est ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur.

2. Pour toute partie A de E, on a $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}\, A$.

Exemple (exercice) Si la distance d provient d'une norme, en d'autres termes si E est un espace vectoriel normé, l'intérieur de la boule fermée $\bar{B}(a, r)$ est égal à la boule ouverte $B(a, r)$. Dans le cas général, ceci est faux : considérer par exemple le cas de la distance discrète.

Adhérence Un point x de E est dit *adhérent* à une partie A de E si tout voisinage de x rencontre A, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Ainsi, x est un point adhérent à A si et seulement s'il n'est pas un point intérieur au complémentaire de A.

Par définition, l'*adhérence* d'une partie A de E est l'ensemble de ses points adhérents. Cet ensemble est noté $\bar{A}$. Ainsi, l'adhérence de A est égal au complémentaire de l'intérieur de $E \setminus A$. Cette remarque permet de prouver simplement à partir de la proposition 2.3 le fait suivant :

Proposition 2.4 *Soit A une partie de E. L'adhérence de A est un ensemble fermé. Plus précisément, c'est le plus petit fermé qui contient A.*

On en déduit notamment qu'une partie de E est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence et, qu'en général, si $A \subset E$, alors $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Exemple (exercice) Si la distance d provient d'une norme, en d'autres termes si E est un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$, avec $r > 0$, est égal à la boule fermée $\bar{B}(a,r)$. Dans le cas général, ceci est faux.

Exercice : distance à un ensemble Si A est une partie de E et x un point de E, on définit la distance de x à A par

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$

Démontrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$.

Si A et B sont deux parties de E, on définit la distance de A à B par

$$d(A,B) = \inf_{x \in A} d(x,B) = \inf_{y \in B} d(y,A) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x,y).$$

Vérifier que les deux égalités de droite sont bien exactes, puis montrer un exemple de deux fermés A et B de $\mathbb{R}^2$ qui n'ont aucun point en commun et pour lesquels $d(A,B) = 0$. Démontrer qu'il faut pour cela que ni A ni B ne soient bornés. (La connaissance du cours sur la compacité est nécessaire pour traiter cette dernière question.)

Frontière d'un ensemble On appelle *frontière* de la partie A de E l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathrm{Int}\, A$.

Exemple Dans l'espace $E = [0,1] \cup [5,6]$ muni de la distance naturelle, la frontière de l'ensemble $A = [0,1]$ est vide.

Exercice Démontrer que si $A \subset E$, la frontière de A est égale à $\bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$.

2.2. Sous-ensembles denses, espaces séparables Une partie D de E est dite *dense* dans E si son adhérence est égale à E, c'est-à-dire si, pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ tel que $d(x,y) \leq \varepsilon$.

EXEMPLES $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.5 (Weierstrass) *L'ensemble des fonctions polynômiales de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est dense dans l'espace* $C^{\mathbb{R}}([0,1])$ *muni de la norme uniforme.*

Nous proposons ici une démonstration à titre d'exercice. On pourra trouver une autre démonstration de ce théorème à la page 38. Une autre démonstration consiste à déduire ce théorème du théorème de Fejér , ce qui est assez rapide, si l'on suppose connu le théorème de Fejér. Cette application du théorème de Fejér est présentée en page 140 du *cours de mathématiques spéciales, vol. 4,* par E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux.

1. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives ou nulles satisfaisant les propriétés suivantes :
– pour chaque entier n, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = 1$;
– pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|\geq\varepsilon} \phi_n(x)dx = 0$ (où $|.|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}$).
(Une telle suite (ϕ_n) s'appelle une *suite de Dirac.*) Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la suite $(\phi_n * f)$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
On rappelle que la fonction $\phi_n * f$ est définie par

$$(\phi_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(y)f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x-y)f(y)dy.$$

2. Soient, pour chaque entier naturel n, $c_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$ et ϕ_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n & \text{si} \quad |x| \leq 1; \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Démontrer que la suite (ϕ_n) satisfait les hypothèses de la question précédente.

b. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Démontrer que, si $\tilde{f}$ est le prolongement de f par 0 en dehors de $[0,1]$, $\phi_n * \tilde{f}$ coïncide sur $[0,1]$ avec une fonction polynômiale.

c. En déduire que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions polynômiales.

Théorème 2.6 (Fejér) *L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $C_{2\pi}^{\mathbb{K}}$ des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme.*

Nous rappelons qu'un *polynôme trigonométrique* est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto e^{inx}$, avec $n \in \mathbb{Z}$. La démonstration de ce théorème est une conséquence directe du résultat plus précis suivant.

Lemme 2.7 *Soit f une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Soient $c_n(f)$ les coefficients de Fourier complexes de f. On note, pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad R_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_n(x).$$

Alors la suite de fonctions $(R_m(x))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Démonstration. Notons tout d'abord D_n et K_n les fonctions définies par

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \qquad K_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} D_n(x).$$

Un calcul simple montre que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $K_m(2k\pi) = m$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et que pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$(*) \qquad\qquad K_m(x) = \frac{1-\cos mx}{n(1-\cos x)}.$$

Les fonctions D_n et K_m s'appellent, respectivement, les *noyaux de Dirichlet et de Fejér.* On vérifie aisément que, si f est une fonction continue 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a, avec les notations du théorème : $S_n = D_n * f$ et $R_m = K_m * f$, où la notation $*$ désigne le produit de convolution de deux fonctions 2π-périodiques : si $h, g \in C_{2\pi}^{\mathbb{K}}$,

$$h * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-y)g(y)dy.$$

Il nous faut donc étudier la convergence de la suite $(K_m * f - f)_{m\in\mathbb{N}}$. Nous noterons dans la suite $\| \ \|$ la norme uniforme sur $\mathbb{R}$. Il est aisé de vérifier que $\int_{-\pi}^{\pi} K_m(y)dy = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(K_m * f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_m(y)(f(x-y) - f(x))dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|(K_m * f)(x) - f(x)| &\leq \int_{\{\eta \leq |y| \leq \pi\}} K_m(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\
&\quad + \int_{\{0 \leq |y| \leq \eta\}} K_m(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\
&\leq 2\|f\| \frac{2\pi}{m(1-\cos\eta)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\{0 \leq |y| \leq \eta\}} K_m(y)dy \\
&\leq 2\|f\| \frac{2\pi}{m(1-\cos\eta)} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On voit donc que, pour tout $m \geq 8\pi\|f\|/(\varepsilon(1 - \cos\eta))$,

$$\|K_m * f - f\| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème. □

Exercice L'ensemble D est dense dans E si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre D.

Exercice Soit c_{00} l'ensemble des suites réelles presque nulles (c'est-à-dire les suites dont seul un nombre fini de termes n'est pas nul) et soit c_0 l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0. Démontrer que c_{00} est dense dans ℓ^p pour tout $p \in [1, \infty[$, ainsi que dans l'espace c_0, muni de la distance définie par la norme $\| \ \|_\infty$. Démontrer également que ni c_{00}, ni c_0 ne sont denses dans ℓ^∞.

Exercices

1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$. (C'est de plus une partie ouverte de $M_n(\mathbb{K})$ - voir plus loin.)
2. **a.** Démontrer que $C_c^{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ est une partie dense de $C_0^{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme uniforme.

   b. Démontrer que $C_0^{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas une partie dense de $C_b^{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.8 *Un espace métrique est dit* séparable *s'il contient une partie dénombrable dense.*

Exemples et exercices

1. $\mathbb{R}$ est séparable.
2. Si E est séparable, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace E^n muni de la distance produit est séparable.

3. L'espace $C^{\mathbb{R}}([0,1])$ muni de la norme uniforme est séparable (utiliser le théorème de Weierstrass).

4. Les espaces ℓ^p, pour tout $p \in [1, \infty[$, sont séparables.

5. L'espace c_0 muni de la norme $\| \|_\infty$ est séparable.

6. Un espace métrique (E, d) est dit *précompact* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \ldots x_N$, tels que

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} B(x_n, \varepsilon).$$

Démontrer que tout espace précompact est séparable.

Proposition 2.9 *Si X est un espace métrique séparable et si Y est une partie de X, alors Y est séparable (pour la distance induite).*

Démonstration. Soit (x_n) une suite dense dans X. On pose

$$\mathcal{U} = \{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \text{ t.q. } B(x_n, 1/p) \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Pour chaque $(n,p) \in \mathcal{U}$, on choisit $x_{n,p}$ un point de $B(x_n, 1/p) \cap Y$. Montrons alors que la famille $D = \{x_{n,p},\ (n,p) \in \mathcal{U}\}$ (qui est bien sûr dénombrable) est dense dans Y. Soient pour cela $x \in Y$ et $\varepsilon > 0$. Soit p un entier tel que $1/p < \varepsilon/2$; il existe certainement un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < 1/p$. Mais alors $x \in B(x_n, 1/p) \cap Y$; donc $(n,p) \in \mathcal{U}$ et $d(x, x_{n,p}) < 2/p < \varepsilon$. □

Proposition 2.10 *Si E est séparable, alors toute famille d'ouverts de E deux à deux disjoints est dénombrable.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de E et soit $(U_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de E deux à deux disjoints, que l'on peut choisir tous non vides. Pour chaque $j \in J$, l'ouvert U_j rencontre certainement l'ensemble $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $n(j)$ le plus petit des entiers n pour lesquels $x_n \in U_j$. Comme les ouverts U_j sont deux à deux disjoints, un point x_n ne peut appartenir qu'à un seul des U_j. Donc l'application $j \mapsto n(j)$ est une injection de J dans $\mathbb{N}$. Ceci montre que J est dénombrable. □

Exercice Démontrer que l'espace ℓ^∞ n'est pas séparable.

2.3. Distances topologiquement équivalentes, normes équivalentes Soient d et d' deux distances définies sur un ensemble E. On dit que d et d' sont *topologiquement équivalentes* si elles définissent les mêmes ouverts, c'est-à-dire si tout ouvert de l'espace métrique (E, d) est un ouvert de (E, d') et réciproquement.

Exemple (exercice) Démontrer que la distance définie dans $\mathbb{R}$ par

$$d(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$$

est équivalente à la distance naturelle (définie par la valeur absolue).

Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N et N' sont *équivalentes* s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$(*) \qquad \forall x \in E \qquad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Proposition 2.11 *Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent des distances topologiquement équivalentes.*

Démonstration. Supposons que deux normes N et N' satisfont la condition $(*)$. Alors, pour tout point $x \in E$, la boule ouverte centrée en x et de rayon $r > 0$ pour la norme N contient la boule ouverte de centre x et de rayon $r\alpha$ pour la norme N'. Ceci montre que tout voisinage de x pour la norme N est un voisinage de x pour N' et donc que tout ouvert pour la norme N est un ouvert pour la norme N'. Par symétrie, on en déduit que les deux normes définissent les mêmes ouverts.

Supposons maintenant que les deux normes définissent les mêmes ouverts et soit B la boule unité ouverte de l'espace E pour la norme N' : $B = \{x \in E \text{ t.q. } N'(x) < 1\}$. Puisque l'ensemble B est ouvert pour la norme N', il l'est aussi pour la norme N. C'est donc un voisinage de 0 pour la norme N. Par conséquent, il existe $\beta > 0$ tel que la boule de centre 0 et de rayon β pour la norme N soit contenue dans B, c'est-à-dire telle que

$$\{x \in E \text{ t.q. } N(x) < \beta\} \subset \{x \in E \text{ t.q. } N'(x) < 1\}.$$

On voit alors que, pour tout $x \in E$, $x/(2\beta N(x)) \in B$ et donc, par homogénéité de la norme N', $N'(x) < 2\beta N(x)$. Les rôles de N et de N' étant symétriques, ceci montre que ces deux normes sont équivalentes. □

Exemple (exercice) Il est aisé de vérifier que les trois normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^d$. En fait, on sait toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$ (théorème 3.12, p. 39).

2.4. Suites convergentes On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E *converge* vers un point x de E si, pour tout voisinage V de x, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à V. Cela peut s'écrire de façon équivalente sous la forme suivante :

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{ tel que }\ \forall n\geq N\ \ d(x_n,x)<\varepsilon.$$

Remarquons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x si et seulement si la suite de réels positifs $(d(x,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On dit que x est la *limite* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on écrit

$$x=\lim_{n\to+\infty}x_n.$$

Proposition 2.12 (Unicité de la limite) *Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et vers y, alors $x=y$.*

Démonstration. Pour démontrer que $x=y$, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $d(x,y)<\varepsilon$. (En effet, si tel est le cas, on a $d(x,y)=0$ et donc $x=y$ puisque d est une distance.) Soit pour cela $\varepsilon>0$ et soient $N,N'\in\mathbb{N}$ tels que, pour tous $n\geq N$ et $n'\geq N'$ $d(x_n,x)<\varepsilon/2$, $d(x_{n'},y)<\varepsilon/2$. Soit maintenant $n\geq N,N'$. Alors $d(x,y)\leq d(x,x_n)+d(x_n,y)<\varepsilon$. □

Proposition 2.13 *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de points de, respectivement, E et F. La suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x,y) dans l'espace $E\times F$ muni de la distance produit si et seulement si $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ et $\lim_{n\to\infty}y_n=y$.*

La démonstration est laissée en exercice.

Bien entendu, ce résultat se généralise de manière évidente à tout produit fini d'espaces métriques.

Caractérisation des voisinages et des points adhérents par les suites convergentes

Proposition 2.14 *Soit A une partie de E.*

1. *L'ensemble A est un voisinage du point $x\in E$ si et seulement si toute suite qui converge vers x a tous ses termes dans A à partir d'un certain rang.*
2. *Un point x de E est adhérent à A si et seulement si il existe une suite de points de A qui converge vers x.*

Exercice

1. Soit E un espace métrique. Démontrer que $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ est une partie fermée de l'espace $\mathcal{F}_b(E,\mathbb{K})$ muni de la norme uniforme.

2. Démontrer que $C_0^{\mathbb{K}}(E)$ est une partie fermée de l'espace $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ muni de la norme uniforme, mais que $C_c^{\mathbb{K}}(E)$ ne l'est pas en général.
3. Démontrer que $C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est une partie fermée de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ muni de la distance de la convergence uniforme sur tout compact.
4. Démontrer que $C_c^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ est une partie dense de $C^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ (fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$) muni de la distance de la convergence uniforme sur tout compact. En déduire que aucun des trois espaces $C_c^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$, $C_b^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ et $C_0^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ n'est une partie fermée de $C^{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme sur tout compact.

Proposition 2.15 *Si deux distances sont équivalentes, elles définissent les mêmes suites convergentes.*

Démonstration. Si les deux distances sont équivalentes, elles définissent les mêmes ouverts et, par conséquent, les points de E ont les mêmes voisinages pour les deux distances. Donc toute suite qui converge pour une des deux distances converge aussi pour l'autre. □

Contrexemple (exercice) Pour tout $f \in C([0,1])$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Vérifier que ces deux relations définissent des normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sur $C([0,1])$ qui ne sont ni équivalentes entre elles, ni équivalentes avec la norme uniforme.

Suites extraites, valeurs d'adhérence Une *suite extraite* (ou sous-suite) d'une suite donnée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, où $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers. Une telle suite $k \mapsto n_k$ peut être aussi considérée comme une fonction ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite extraite (x_{n_k}) peut alors être notée $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Comme par ailleurs la fonction ϕ est caractérisée par son image $A = \phi(\mathbb{N})$ (si $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n)$ est le $(n+1)$-ième terme de A pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$), la suite extraite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est déterminée par l'ensemble infini A et on la note aussi $(x_n)_{n\in A}$. On utilisera dans la suite ces trois notations.

On dit que le point x est une *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Remarquons qu'une suite convergente admet une valeur d'adhérence et une seule : sa limite. Mais attention : une suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement [†]. Par exemple, 0 est la seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ de la suite réelle (u_n) définie par $u_n = (1 + (-1)^n)n$ et pourtant cette suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

†. sauf si E est compact, voir page 31

Exercice Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k,\ k \geq n\}}$.

Exercice (pas facile) Démontrer que tout point du cercle unité de $\mathbb{C}$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = e^{in}$.

2.5. Continuité

Limite d'une fonction en un point Soit f une fonction d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, d). On dit que $f(x)$ admet pour *limite* le point $b \in F$ lorsque x tend vers le point $a \in E$ si l'image réciproque par f de tout voisinage de b est un voisinage de a. On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Proposition 2.16 *On a :* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *si et seulement si*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ \forall x \in E \ \ d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), b) < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et soit $\varepsilon > 0$. La boule de F, $B = B(b, \varepsilon)$, est un voisinage de b et donc $f^{-1}(B)$ est un voisinage de a. Cela signifie qu'il existe une boule centrée en a contenue dans $f^{-1}(B)$. En d'autres termes, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset f^{-1}(B)$, c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in E$, $d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), b) < \varepsilon$. Supposons réciproquement que la condition $(*)$ est satisfaite et soit V un voisinage de b. Par définition d'un voisinage de b, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $B(b, \varepsilon) \subset V$. Soit alors $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), b) < \varepsilon$. Pour tout $x \in B(a, \eta)$, on a donc $f(x) \in V$. Donc $B(a, \eta) \subset f^{-1}(V)$, ce qui démontre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a. □

Proposition 2.17 *On a :* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *si et seulement si l'image par f de toute suite de E qui converge vers a est une suite de F qui converge vers b.*

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers a. Pour démontrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, fixons $\varepsilon > 0$. Choisissons ensuite $\eta > 0$ tel que $f(B(a, \eta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Puisque $\lim x_n = a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $d(a, x_n) < \eta$. Mais alors, pour tout $n \geq N$, $\delta(f(x_n), b) < \varepsilon$.

Supposons réciproquement que $f(x)$ n'admet pas pour limite b quand x tend vers a. Nous allons alors construire une suite de E qui converge vers a et dont l'image par f ne converge pas vers b. Si $f(x)$ n'admet pas pour limite b quand x tend vers a, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in B(a, \eta)$ tel que $f(x) \notin B(b, \varepsilon)$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, x_n un point de $B(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin B(b, \varepsilon)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a mais son image par f, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, ne tend pas vers b. □

Applications continues Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. Une application f de E dans F est dite *continue* au point $a \in E$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Des résultats précédents, on déduit les trois caractérisations suivantes de la continuité de l'application f au point a :

Proposition 2.18 *L'application f est continue en a si et seulement si l'une des trois propriétés suivantes est satisfaite :*

1. *l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a ;*
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in E \ \ d(x,a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$; $\qquad (*)$
3. *l'image par f de toute suite de E qui converge vers a est une suite de F qui converge vers $f(a)$.*

Exercices Étudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \quad h(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Composition d'applications continues

Proposition 2.19 *Soient (E,d), (F,δ) et (G,∂) trois espaces métriques. Si f est une fonction de E dans F continue au point $a \in E$, et si g est une application continue de F dans G continue en $f(a)$, alors l'application $g \circ f$ est continue en a.*

La démonstration est laissée en exercice.

Applications continues sur tout l'espace L'application f est dite *continue sur* E si elle est continue en tout point de E.

On dit qu'une application f de E dans F est *lipschitzienne* s'il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tous $x, y \in E$, $\delta(f(x), f(y)) \leq L d(x,y)$ (la constante L étant appelée *rapport de Lipschitz* de f).

Proposition 2.20 *Toute application lipschitzienne de E dans F est continue sur E.*

La démonstration, très simple, est laissée en exercice.

Les résultats des exercices 1 et 2 sont à connaître.

Exercice 1 Démontrer que toute application linéaire de l'espace vectoriel normé $\mathbb{K}^n$, muni par exemple de la norme $\| \ \|_1$, dans un espace vectoriel normé F, est lipschitzienne, et donc continue. (Comme on le verra plus loin, dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ce résulat ne dépend donc pas de la norme choisie sur $\mathbb{K}^n$.)

En particulier, les projections $p_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} \mapsto x_j$ sont des applications continues.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$. Démontrer que les applications suivantes sont continues. $s : E\times E \to E$, $(x, y) \mapsto x+y$; $p : \mathbb{K}\times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$; $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.

Tout ceci entraîne notamment, grâce à la proposition 2.19, que toute application polynômiale de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est continue (puisqu'une telle application est une somme de produits de diverses fonctions p_j). En particulier, l'application qui à une matrice $n \times n$ associe son déterminant est une application continue de $M_n(\mathbb{K})$ (assimilé par exemple à $\mathbb{K}^{n^2}$) dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3 Soit a un point de E. Démontrer que l'application $x \mapsto d(x, a)$ est lipschitzienne de rapport 1. Plus généralement, soit A une partie de E. Démontrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne de rapport 1.

Exercice 4 Si x et y sont deux réels tels que $x \neq y$, on pose

$$f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}.$$

Existe-t-il une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ qui coïncide avec f sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$?

Caractérisation de la continuité par les ouverts, les fermés

Proposition 2.21 *Une application f, de E dans F, est continue sur E si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E, ou encore si et seulement si l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la propriété relative aux ouverts et celle relative aux fermés sont équivalentes : il suffit pour s'en apercevoir de passer aux complémentaires. Supposons maintenant que f est continue et soit U un ouvert de F. Il faut montrer que $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Comme U est un ouvert qui contient x, c'est un voisinage de $f(x)$ et donc, puisque f est continue en x, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. Supposons réciproquement que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E et soient a un point de E et U un voisinage de $f(a)$. Il faut démontrer que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a. Puisque U est un voisinage de $f(a)$, on peut choisir un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B = B(f(a), \varepsilon)$ soit contenue dans U. Cette boule étant ouverte, son image réciproque par f est un ouvert qui contient a. C'est donc un voisinage de a. Puisque $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U)$, ce dernier ensemble est aussi un voisinage de a. □

Corollaire 2.22 *Si d et d' sont deux distances équivalentes sur E, et δ, δ' sont deux distances équivalentes sur F, alors toute application continue de (E, d) dans (F, δ) est aussi continue de (E, d') dans (F, δ').*

La partie la plus utile de la proposition 2.21 est la condition nécessaire. Elle fournit notamment un outil très efficace pour démontrer que certains ensembles sont ouverts ou fermés.

Exemples (exercices)

1. Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(\{0\})$ est une partie fermée de E.

2. L'ensemble des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{K})$ (muni de la norme que l'on voudra).

3. Soit $a \in [0,1]$. L'ensemble des fonctions $f \in C^{\mathbb{K}}([0,1])$ telles que $f(a) = 0$ est une partie fermée de $C^{\mathbb{K}}([0,1])$ muni de la norme uniforme. Mais ce n'est pas une partie fermée de $C^{\mathbb{K}}([0,1])$, pour la norme $\| \ \|_p$ avec $p = 1$ ou 2.

4. Les ensembles des matrices à coefficients réels $n \times n$, symétriques, orthogonales, diagonales, triangulaires, sont des parties fermées de $M_n(\mathbb{R})$.

5. Si f est une application continue de E dans F, alors le graphe de f est une partie fermée de $E \times F$ muni de la distance produit.

Homéomorphismes Une application de E dans F est un *homéomorphisme* si elle est continue, bijective et si sa fonction réciproque est également continue.

Ainsi, un homéomorphisme de E dans F définit une bijection entre l'ensemble des ouverts de E et l'ensemble des ouverts de F.

S'il existe un homéomorphisme entre deux espaces métriques, ces deux espaces sont dits *homéomorphes.*

Exemples (exercices)

1. Démontrer que l'application $(a, b) \mapsto a + ib$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne, dans $\mathbb{C}$, muni de sa topologie naturelle.

2. Démontrer que l'application arctangente est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ (la droite réelle achevée) sur l'intervalle fermé $[-\pi/2, \pi/2]$.

Il sera vu d'autres exemples d'espaces métriques homéomorphes dans le paragraphe consacré aux espaces compacts.

Continuité des applications linéaires. Norme d'une application linéaire continue

Proposition 2.23 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire de E dans F est continue si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes :*

1. *f est continue en 0 ;*

2. *f est bornée sur la boule unité $\bar{B}(0,1)$ de E ;*

3. *il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait : $\|f(x)\| \leq M\|x\|$;*

4. *f est lipschitzienne.*

Si c'est le cas, le réel $\|f\| = \sup_{x\in\bar{B}(0,1)} \|f(x)\|$ *s'appelle la norme de* f.

On vérifie sans peine que l'application $f \mapsto \|f\|$ ainsi définie est une norme sur l'espace vectoriel $L(E,F)$ formé des applications linéaires continues de E dans F.

Démonstration. Il est tout d'abord très simple de vérifier que les propriétés **2.** à **4.** sont équivalentes : si f est bornée sur la boule unité par le réel $M > 0$, alors, pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, $f(x) = f(x/\|x\|)\|x\|$ et donc, puisque le vecteur $x/\|x\|$ appartient à la boule unité, $\|f(x)\| \le M\|x\|$. Si $x = 0$, cette inégalité est bien sûr toujours vraie. Si maintenant y, z sont deux points de E, on a $\|f(y)-f(z)\| = \|f(y-z)\| \le M\|y-z\|$ et f est lipschitzienne. Si réciproquement f est lipschitzienne de rapport M, alors, pour tout $x \in B(0,1)$, on a $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \le M\|x-0\| \le M$, donc f est bornée sur la boule unité.

Puisque toute fonction lipschitzienne est continue, la seule chose restant à démontrer est que si f est continue en 0, alors elle est bornée sur la boule unité de E. Or, si f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in B(0,\eta)$, $\|f(x) - f(0)\| \le 1$, ou encore $\|f(x)\| \le 1$. Par conséquent, si $x \in B(0,1)$, alors $\|f(x)\| = (1/\eta)\|f(\eta x)\| \le 1/\eta$. Donc f est bornée par $1/\eta$ sur la boule unité. □

Exercice 1 On munit l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie par

$$\|P\| = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

Démontrer que la forme linéaire ϕ définie sur E par $\phi : P \mapsto P(2)$ n'est pas continue.

Exercice 2 : les hyperplans d'un espace vectoriel normé Soit ϕ une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E.

1. Démontrer que ϕ est continue si et seulement si son noyau est une partie fermée de E.

2. Démontrer que, si ϕ n'est pas continue, alors son noyau est une partie dense de E. (On pourra commencer à démontrer que l'adhérence de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.)

3. Démontrer que tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E.

On rappelle qu'un *hyperplan* de E est, par définition, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E. On rappelle aussi qu'un sous-espace strict de E est un hyperplan si et seulement si le seul sous-espace vectoriel de E qui le contient strictement est l'espace E lui-même.

Applications uniformément continues On sait qu'une application f de E dans F est continue sur E si

$$\forall a \in E,\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \eta > 0\ \text{ tel que }\ \forall x \in E\ \ d(x,a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Elle est dite *uniformément continue* sur E si le réel $\eta > 0$ ne dépend pas du point a choisi, mais seulement de ε, en d'autres termes si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x, y \in E \ \ d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Par exemple, toute application lipschitzienne de E dans F est uniformément continue. On rappelle (théorème de Heine) que toute fonction continue définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment. (Il sera vu plus loin une généralisation de ce théorème - cf. p. 36.)

Exercice : Donner un exemple d'application continue qui n'est pas uniformément continue.

Exercice : le module de continuité uniforme Soit f une fonction de E dans F. On définit la fonction ϕ de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty]$ par $\phi(0) = 0$ et, pour $t > 0$,

$$\phi(t) = \sup\{\delta(f(x), f(y)), \ \ \text{avec } \ x, y \in E \text{ et } d(x,y) \leq t\}.$$

Démontrer que f est uniformément continue sur E si et seulement si la fonction ϕ est continue en 0. Si c'est le cas, ϕ s'appelle le *module de continuité uniforme* de f. Vérifier par ailleurs que f est lipschitzienne si et seulement si il existe $L > 0$ tel que $\phi(t) \leq Lt$ pour tout $t \geq 0$.

3. Compacité

La notion de compacité, l'une des plus importantes en analyse, fut introduite pour la première fois par M. Fréchet en 1904. L'intention de ce dernier était de généraliser le théorème, dû à Weierstrass, selon lequel toute fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ y atteint au moins une fois son maximum. Le problème était alors de savoir par quoi remplacer l'hypothèse "fermé et borné" pour que ce théorème soit vrai pour des fonctions continues définies sur des espaces plus généraux que $\mathbb{R}$.

3.1. Propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E est dite *compacte* si elle satisfait la *propriété de Borel-Lebesgue* :

de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un recouvrement fini,

c'est-à-dire, plus formellement, que, si $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts dont l'union contient A, alors il existe une partie finie J_F de J telle que $\cup_{j\in J_F} U_j \supset A$. Par passage au complémentaire, on voit que la propriété de Borel-Lebesgue peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

de toute famille de fermés de E dont l'intersection ne rencontre pas A, on peut extraire une famille finie dont l'intersection ne rencontre pas A.

De cette caractérisation des espaces compacts on déduit immédiatement ceci :

Proposition 3.1 *Si E est compact, alors toute suite décroissante de fermés non vides de E a une intersection non vide.*

Démonstration. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait une suite finie et décroissante de fermés non vides de E dont l'intersection serait vide, ce qui est absurde. □

(C'est par cette propriété que Fréchet *définit* la notion d'espace (métrique) compact dans son premier article de 1914.)

Exercices

1. **a.** Démontrer que tout compact est précompact (cf. p. 20) et donc séparable.
   b. Donner un exemple d'espace métrique précompact non compact. (Il sera vu au théorème 4.7, p. 48 qu'un tel espace ne peut pas être complet.)
2. On munit un ensemble E de la distance discrète. Démontrer qu'une partie de E est compacte si et seulement si elle est finie.
3. Démontrer qu'une union finie de compacts est un compact.

Théorème 3.2 *Une partie A de E est compacte si et seulement si elle satisfait la* propriété de Bolzano-Weierstrass *:*

toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A,

c'est-à-dire si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A.

Démonstration. Supposons A compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est $S = \cap_{n\in\mathbb{N}} S_n$, avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \overline{\{x_k,\ k \geq n\}}$. Si $A \cap S$ était vide, alors, par la propriété de Borel-Lebesgue, il existerait un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A \cap \bigcap_{n\leq n_0} S_n = \emptyset$, ce qui n'est pas possible car l'ensemble $\bigcap_{n\leq n_0} S_n = S_{n_0}$ contient en particulier tous les termes x_k, avec $k \geq n_0$, qui appartiennent à A.

Supposons réciproquement que la propriété de Bolzano-Weierstrass est satisfaite et soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement de A par une famille d'ouverts de E. Nous montrons tout d'abord l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a \in A$, la boule $B(a, \varepsilon)$ est contenue dans au moins un ouvert U_j. Si ce n'est pas le cas, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un point $a_n \in A$ tel que la boule $B(a_n, 1/n)$ ne soit contenue dans aucun ouvert U_j. Soit alors $a \in A$ une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $j_0 \in J$ tel que $a \in U_{j_0}$. L'ensemble U_{j_0} est ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U_{j_0}$. D'après la définition d'une valeur d'adhérence, il y a une infinité de termes a_n dans la boule $B(a, \eta/2)$. Il existe donc en particulier au moins un entier $n_0 > 2/\eta$ pour lequel $a_{n_0} \in B(a, \eta/2)$. Mais on voit qu'alors $B(a_{n_0}, 1/n_0) \subset U_{j_0}$, ce qui contredit ce qui est dit plus haut. L'existence de notre paramètre $\varepsilon > 0$ est ainsi démontrée. Choisissons maintenant un tel ε. Il ne reste plus qu'à montrer que A peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(a_1, \varepsilon), \ldots, B(a_n, \varepsilon)$, avec $a_1, \ldots, a_n \in A$. (En effet, si, pour chaque $k \leq n$ on choisit $i_k \in J$ tel que $a_k \in U_{j_k}$, on aura bien $\bigcup_{1\leq k\leq n} U_{j_k} \supset A$.) Si ce n'est pas le cas, on peut construire par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A \setminus \cup_{k=1}^{n-1} B(a_k, \varepsilon)$. En particulier, on a, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $d(a_n, a_m) > \varepsilon$ et donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence, ce qui contredit la propriété de Bolzano-Weierstrass. □

Exercices

1. La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique compact.

2. Si A est compact, démontrer que toute suite de points de A qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.

3. Soit A une partie de E. Démontrer que A est une partie compacte de l'espace métrique (E, d) si et seulement si c'est une partie compacte de l'espace métrique (A, d).

On dit qu'une partie A de E est *bornée* si elle est contenue dans une boule de E.

Proposition 3.3 **1.** *Toute partie compacte de E est une partie fermée et bornée de E.*

2. *Si E est compact, alors tout fermé de E est aussi compact.*
3. *Si A est un compact de l'espace métrique (E, d) et si B est un compact de l'espace métrique (F, δ), alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$, muni de la distance produit.*

Démonstration.

1. Soit A un compact de E et soit a un point adhérent à A. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers a. Cette suite admet une valeur d'adhérence dans A d'après la propriété de B-W, valeur d'adhérence qui ne peut être que a (une suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence). Donc $a \in A$ et A est fermé.

   Pour voir que A est borné, il suffit d'extraire du recouvrement $(B(a, 1))_{a\in A}$ de A un recouvrement fini $B(a_1, 1), \ldots, B(a_n, 1)$. On voit alors que $A \subset B(a_1, M)$, où $M = 1 \max_{2\leq j\leq n} d(a_1, a_j)$.
2. C'est immédiat si l'on utilise la propriété de B-W.
3. Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $A \times B$. Puisque A est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $a \in A$. Puisque B est compact, la suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(y_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $b \in B$. La suite $(x_{n_{k_p}}, y_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ est alors une suite extraite de $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le point $(a, b) \in A \times B$

□

Parties compactes de $\mathbb{K}^n$ On sait que de toute suite bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ on peut extraire une sous-suite convergente. Ceci montre que toute partie fermée et bornée de $\mathbb{K}$ est compacte. En utilisant le premier et troisième points de la proposition 3.3, on en déduit la caractérisation suivante des parties compactes de l'espace $\mathbb{K}^n$, muni de la distance produit, c'est-à-dire de l'espace normé $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_1)$:

Proposition 3.4 *Une partie de l'espace normé $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_1)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

En particulier, de toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_1)$ on peut extraire une sous-suite convergente.

On sait que toutes les normes de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes (cf. plus loin, théorème 3.12, p. 39). Une partie de $\mathbb{K}^n$ est donc compacte, fermée ou bornée pour une certaine norme si et seulement si elle l'est pour la norme $\|\ \|_1$. La proposition 3.4 est donc vraie quelle que soit la norme considérée sur $\mathbb{K}^n$.

Dans la suite, les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $M_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire $\mathbb{K}^{n^2}$) considérés sont toujours supposés munis de la norme $\|\ \|_1$, ce qui permet d'utiliser la proposition 3.4. Mais le théorème 3.12, p. 39 montrera que tous les résultats démontrés dans ce cadre sont vrais indépendamment de la norme choisie.

Exemples (exercices) **a.** L'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$. **b.** L'ensemble des matrices $n \times n$ unitaires est une partie compacte de $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice Si $i, n \in \mathbb{N}$, on note $\delta_{i,n} = 1$ si $i = n$ et $\delta_{i,n} = 0$ si $i \neq n$. Soit, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, δ_i la suite $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que l'ensemble $A = \{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une partie fermée et bornée de ℓ^∞, mais qu'elle n'est pas compacte.

Lemme de Dini La propriété de Borel-Lebesgue est utilisée ici pour démontrer une théorème de convergence dans $C(X)$, avec X compact.

Proposition 3.5 (Lemme de Dini) *Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $C^{\mathbb{R}}(X)$ (*i.e. *$f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n). Si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f \in C(X)$, alors elle converge uniformément vers f.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n on pose $\Omega_n = \{x \in X \text{ t.q. } f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$. Il est clair que (Ω_n) est une suite croissante d'ouverts (car les fonctions f et f_n sont continues) de X dont la réunion est X. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un entier N tel que $\Omega_N = X$ et donc tel que pour tout $x \in X$, $f_N(x) > f(x) - \varepsilon$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$ on a : $\forall x \in X$, $f(x) - \varepsilon < f_n(x) \leq f(x)$ et donc $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$. □

Remarques

1. On peut évidemment remplacer dans l'énoncé du lemme de Dini l'hypothèse « croissante » par « décroissante ».
2. L'hypothèse que la limite simple f est continue est absolument essentielle. Par exemple la suite décroissante (f_n) de fonctions continues sur $[0, 1]$ définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$ (si la convergence était uniforme la limite serait une fonction continue, ce qui n'est pas le cas).

Exemple. On définit par récurrence sur n la suite de fonctions polynômiales (P_n) sur $[-1, 1]$ par

$$P_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)).$$

Vérifions que pour tout entier n positif, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Pour $n = 0$ c'est clair ; supposons que cette propriété est vérifiée pour l'entier $n \geq 0$. Alors pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$0 \leq P_{n+1}(x) \leq P_{n+2}(x) = |x| - (|x| - P_{n+1}(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))\right) \leq |x|.$$

Ainsi la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et bornée qui converge donc simplement vers une fonction f telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, $0 \leq f(x) \leq |x|$ et $f^2(x) = x^2$ (par passage à la limite dans la relation de récurrence qui définit les P_n). Donc $f(x) = |x|$ et le lemme de Dini s'applique, prouvant que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1, 1]$.

3.2. Compacité et applications continues

Proposition 3.6 *Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F. Si f est continue, alors l'image par f de tout compact de E est un compact de F.*

Démonstration. Soit K un compact de E. Il s'agit de démontrer que toute suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(K)$ admet une sous-suite convergente dont la limite est dans $f(K)$. Comme K est compact la suite (u_n) d'éléments de K admet une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers un point x de K. Comme f est continue l'image par f de cette sous-suite, à savoir la suite $(f(u_{n_k})$, converge vers $f(x)$ qui est un élément de $f(K)$. $\square$

Exercice Démontrer qu'un espace métrique E est compact si et seulement si toute fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ est bornée.

Solution. Si X n'est pas compact, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui n'admet aucune sous-suite convergente. Quitte à supprimer des termes de la suite, on peut supposer ces derniers deux à deux distincts. L'ensemble $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ n'admet donc pas de point d'accumulation. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble $X_n = \{x_p,\ p\neq n\}$ non plus. Ces ensembles sont donc fermés et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d(x_n,X_n)>0$. Posons alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_n=\min(1/n,\ (1/2)d(x_n,X_n))$. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tend vers 0 et $\forall n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m\Rightarrow B(x_n,r_n)\cap B(x_m,r_m)=\emptyset$. On considère alors la suite de fonctions $(\phi_n)_n$ définies sur X par

$$\phi_n(x)=(1-d(x,x_n)/r_n)^+$$

et la fonction $f=\sum_{n\in\mathbb{N}} n\phi_n$. Chaque fonction ϕ_n est continue et, pour chaque entier $n\in\mathbb{N}$, $f_{|B(x_n,r_n)}=n\phi_{n|B(x_n,r_n)}$ et donc f est continue sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,r_n)$. Soit $x\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,r_n)$. Comme aucune sous-suite de $(x_n)_n$ ne converge vers x, il existe $\varepsilon>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\notin B(x,\varepsilon)$. Puisque la suite $(r_n)_n$ tend vers 0, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N+1,\ r_n<\varepsilon/2$. Dans ce cas, les fonctions f et $\sum_{n=0}^{N} n\phi_n$ coïncident sur l'ouvert $B(x,\varepsilon/2)$. Donc f est continue sur $B(x,\varepsilon/2)$ et donc, en particulier, en x. Finalement, f est une fonction continue. D'autre part, pour tout $n\in\mathbb{N},\ f(x_n)=n$ donc f n'est pas bornée.

Corollaire 3.7 *Soit f une fonction continue d'un espace métrique compact K dans $\mathbb{R}$. Alors f atteint ses bornes, c'est-à-dire que tout d'abord les nombres*

$$m=\inf_{x\in K} f(x) \qquad \text{et} \qquad M=\sup_{x\in K} f(x)$$

existent et que de plus il existe deux points de K, a et b, tels que $f(a)=m$ et $f(b)=M$.

Démonstration. Puisque $f(K)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure : $m = \inf f(K) = \inf_{x\in K} f(x)$ et $M = \sup f(K) = \sup_{x\in K} f(x)$. Or la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble sont adhérents à cet ensemble et donc sont contenus dans cet ensemble si celui-ci est fermé, ce qui est le cas ici. □

Exercices

1. Démontrer que toute application f d'un espace métrique compact (K, d) dans lui-même, telle que, pour tous $x, y \in K$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, admet un point fixe (c'est-à-dire un point x tel que $f(a) = a$) et un seul. (*Indication.* Considérer la fonction g définie sur K par $g(x) = d(f(x), x)$.)

2. Soit f la fonction de $(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout point $M = (x, y, z)$ non nul,

$$f(M) = f(x, y, z) = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Démontrer l'existence de deux constantes $A, B > 0$ telles que, pour tout $M \in (\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$, $A \leq f(M) \leq B$. (Se ramener à l'étude de f sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.)

3. Soient F une partie fermée de l'espace métrique E et K un compact de E. Démontrer que $K \cap F = \emptyset$ si et seulement si $d(F, K) = 0$. (La distance entre deux parties d'un espace métrique est définie à la page 16. On pourra également utiliser le résultat de l'exercice 3, p. 26.)

4. Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F. On suppose que le graphe de f est une partie fermée de $E \times F$ et que F est compact. Démontrer que f est continue. (Comparer avec l'exercice 5, p. 27.)

5. *Idéaux de* $C(X)$. Soient X un espace métrique compact et J un idéal de l'anneau $(C(X), +, .)$. On note Z l'ensemble des points x de X tels que $g(x) = 0$ pour chaque $g \in J$.

- **a.** Démontrer que si Z est vide, alors J contient une fonction g telle que $\forall x \in X$, $g(x) > 0$. En déduire que $J = C(X)$.
- **b.** On pose, pour $a \in X$, $J_a = \{g \in C(X) \text{ t.q. } g(a) = 0\}$. Démontrer que J_a est un idéal maximal, c'est à dire que le seul idéal contenant strictement J_a est $C(X)$.
- **c.** Réciproquement, démontrer que si J est un idéal maximal, alors il existe un unique point a de X tel que $J = J_a$.
- **d.** Démontrer que $\bar{J} = \{f \in C(X) \text{ t.q. } \forall x \in Z\ f(x) = 0\}$.
  Indication : Soit $f \in C(X)$ qui s'annule en tous les points de Z. Pour trouver un élément de J à une distance de f inférieure à 2ε on pourra procéder de la sorte :

i. Soit K l'ensemble des points x de X pour lesquels $|f(x)| \geq \varepsilon$. Démontrer qu'il existe un élément g de J tel que pour tout $x \in K$ on a : $g(x) > 0$ et, pour tout $x \in X$, $g(x) \geq 0$.

ii. Démontrer que pour tout entier n assez grand, la fonction f_n définie par :

$$f_n = f\frac{ng}{1+ng}$$

est un élément de J et que : $\|f_n - f\| \leq 2\varepsilon$.

Proposition 3.8 *Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F. Si f est une bijection continue et si E est compact, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'application réciproque f^{-1} est continue, c'est-à-dire que l'image réciproque par f^{-1} d'un fermé de E est un fermé de F. Or, si A est un fermé du compact E, A est compact et donc $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ est compact, et donc fermé. □

Théorème 3.9 (Heine) *Soit f une application définie sur une partie compacte K d'un espace métrique E et à valeurs dans un espace métrique F. Si f est continue, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur K, c'est à dire qu'il existe un certain $\varepsilon > 0$ pour lequel pour tout $\alpha > 0$ il existe deux points x et y de K tels que $\|x - y\| \leq \alpha$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$. En particulier pour $\alpha = 1/n$, il existe deux points que nous noterons x_n et y_n tels que :

$$(*) \qquad \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon.$$

Or la suite (x_n) est une suite de points d'un ensemble fermé et borné et donc compact. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$. De même on peut extraire de la suite $(y_{\phi(n)})$ une sous-suite convergente $(y_{\psi(\phi(n))})$ dont nous noterons y la limite. La suite $(x_{\psi(\phi(n))})$ est alors une sous-suite d'une suite convergente, donc elle converge. Soit x sa limite. Si dans les inégalités $(*)$ l'on choisit $n = \psi(\phi(m))$ et si l'on fait tendre m vers l'infini on obtient :

$$\|x - y\| = 0 \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$$

(ce passage à la limite est justifié car f est continue). Cela signifie donc que $x = y$ et que $f(x) \neq f(y)$, ce qui est absurde. □

Exercice 1 Démontrer que toute fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Le théorème de Heine a de nombreuses applications en analyse. Il permet de démontrer par exemple par des moyens élémentaires le théorème de Weierstrass, présenté en exercice ci-dessous, le théorème de Riemann-Lebesgue pour des fonctions continues par morceaux (par le biais du corollaire ci-dessous), le théorème de Fejér (cf. page 18), ...

Corollaire 3.10 *Toute fonction continue par morceaux d'un intervalle fermé et borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace métrique E est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E.*

On rappelle qu'une *fonction en escalier* de $[a,b]$ dans E est une fonction constante par morceaux, c'est-à-dire une fonction telle qu'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ et des vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de E tels que, pour tout $i \leq n-1$ et tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $f(x) = v_i$. On rappelle également qu'une fonction f de $[a,b]$ dans E est dite *continue par morceaux* si elle admet une limite finie à droite en a, une limite finie à gauche en b et si elle est continue en tout point de $]a,b[$, sauf peut-être en un nombre fini d'entre eux, où elle admet seulement des limites (finies) à droite et à gauche.

Démonstration. Soit f une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans un espace métrique (E,d) et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $x_0, \ldots, x_m$ les points de $[a,b]$ où f n'est pas continue. Si $0 \leq k \leq m-1$, la fonction $f_{(k)}$ définie sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par $f_{(k)}(x) = f(x)$ si $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $f_{(k)}(x_k) = \lim_{x \to x_k^+} f(x)$ et $f_{(k)}(x_{k+1}) = \lim_{x \to x_{k+1}^-} f(x)$ est continue et donc uniformément continue. Il existe donc $\eta_k > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [x_k, x_{k+1}]$, $|x-y| \leq \eta_k \Rightarrow d(f_{(k)}(x), f_{(k)}(y)) \leq 1/p$. Définissons maintenant, pour chaque k, une fonction en escalier $g_{(k)}$ sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ de la manière suivante. Soit N_k un entier tel que $(x_{k+1} - x_k)/N_k \leq \eta_k$. On partage l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ en N_k sous-intervalles de longueurs $l_k = (x_{k+1} - x_k)/N_k$ et on considère la fonction $g_{(k)}$ qui est constante sur chacun de ces sous-intervalles. Plus précisément, on pose, pour chaque $n < N_k$ et chaque $x \in [x_k + l_k n, x_k + l_k(n+1)[$, $g_{(k)}(x) = f_{(k)}(x_k + l_k n)$. (Faire un dessin.) Alors, pour tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$, on a $d(f(x), g_{(k)}(x)) \leq 1/p$. On considère alors la fonction f_p, de $[a,b]$ dans E, qui coïncide avec f aux points x_k, et qui coïncide, sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, avec la fonction $g_{(k)}$. Alors f_p est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, on a $d(f(x), f_p(x)) \leq 1/p$. La suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ répond donc au problème posé. $\square$

Comme application simple de ce corollaire, citons par exemple le lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions continues par morceaux.

Lemme 3.11 (Riemann-Lebesgue) *Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, soit*

$$F(\lambda) = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt.$$

Alors $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 0$.

Démonstration. Constatons tout d'abord que ce résultat est évident si la fonction f est constante, puisque dans ce cas on a $F(\lambda) = C(\cos(a\lambda) - \cos(b\lambda))/\lambda$. Il est tout aussi clair si f est une fonction en escalier (utiliser la relation de Chasles). Considérons maintenant le cas général d'une fonction f continue par morceaux et soit $\varepsilon > 0$. On sait que f est la limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escalier. En particulier, il existe au moins une fonction en escalier g sur $[a, b]$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - g(x)| \le \varepsilon/2(b - a)$. Comme on vient de le constater, on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$

Soit alors $\Lambda > 0$ tel que, pour tout $\lambda \ge \Lambda$,

$$\left| \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt \right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout $\lambda \ge \Lambda$, on a :

$$|F(\lambda)| \le \left| \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt \right| + \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \le \varepsilon,$$

ce qui démontre le résultat. □

Problème : une démonstration constructive du théorème de Weierstrass ; les polynômes de Bernstein Les fonctions considérées dans cet exercice sont à valeurs réelles (*i.e.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. *Théorème de Korovkin.* Si $i \in \mathbb{N}$ on note X^i l'élément de $C([0, 1])$ défini par $X^i(x) = x^i$. On note aussi $1 = X^0$ et $X = X^1$. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de $C([0, 1])$ dans lui-même, que l'on suppose *positives,* c'est-à-dire que $f \ge 0 \Rightarrow T_n(f) \ge 0$, ou encore : $f \le g \Rightarrow T_n(f) \le T_n(g)$. On suppose de plus que, pour $i = 0, 1, 2$, la suite de fonctions $(T_n(X^i))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X^i uniformément sur $[0, 1]$. On cherche à démontrer que pour tout $f \in C([0, 1])$, la suite $(T_n f)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

   Soient pour cela f une fonction continue sur $[0, 1]$ et $\eta \mapsto \omega_f(\eta)$ son module de continuité uniforme. On fixe de plus $\eta > 0$.

a. Démontrer que pour tout $x, y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\eta) + 2(x-y)^2 \frac{\|f\|}{\eta^2}.$$

(On pourra traiter séparément les cas $|x-y| \leq \eta$ et $|x-y| > \eta$.)

b. Si $x, y \in [0,1]$ soit $g_y(x) = (x-y)^2$. Démontrer que si $x, y \in [0,1]$, alors pour tout entier naturel n on a :

$$|(T_n f)(x) - f(y) T_n(1)(x)| \leq \omega_f(\eta) T_n(1)(x) + 2\frac{\|f\|}{\eta^2}(T_n g_y)(x).$$

c. Soit $h_n(x) = (T_n g_x)(x)$. Démontrer que la suite de fonctions (h_n) converge uniformément vers 0 dans $[0,1]$.

Indication. $T_n g_x(x) = (T_n X^2 - 2X T_n X + X^2 T_n 1)(x)$.

d. En déduire que $\limsup_{n \to +\infty} \|T_n f - f\| \leq \omega_f(\eta)$. Conclure.

2. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour chaque entier $n \geq 1$ on définit le polynôme $B_n(f)$ par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

a. Démontrer que

$$B_n(Xf) = X B_n(f) + \frac{X(1-X)}{n} B_n'(f)$$

où $B_n'(f)$ représente le polynôme dérivé de $B_n(f)$.

b. Calculer $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$ pour chaque entier naturel n.

c. Démontrer que pour tout $f \in C([0,1])$ la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f.

3.3. Application aux espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 3.12 *Dans un espace vectoriel de dimension finie E sur $\mathbb{K}$, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{K}^n$ qui à un élément de E associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Cette application est une bijection linéaire, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, notons $N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\phi(x)\|_1$. L'application N ainsi définie sur E est une norme et ϕ est un homéomorphisme de (E, N) sur $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$ (par construction). Il nous suffit de démontrer que toute norme sur E est équivalente à celle-ci. Soit pour cela ν une norme quelconque sur E.

Démontrons tout d'abord que ν est une application continue de l'espace normé (E, N) dans $\mathbb{R}$. Soient $x = \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)$ et $y = \phi^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$ deux points de E. On a :

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq \nu(x - y) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \nu(e_i) \leq N(x - y) \max_{1 \leq i \leq n} \nu(e_i).$$

Ceci montre que ν est lipschitzienne, et donc continue, de (E, N) dans $\mathbb{R}$.

Notons maintenant S la sphère unité de E pour la norme N :

$$S = \{x \in E \quad \text{t.q.} \ \ N(x) = 1\}.$$

L'ensemble S est l'image réciproque par ϕ de la sphère unité

$$S_1 = \{x \in \mathbb{K}^n \quad \text{t.q.} \ \ \|x\|_1 = 1\}$$

de $\mathbb{K}^n$, qui est une partie fermée (c'est l'image réciproque de 1 par l'application continue $x \mapsto \|x\|_1$) et bornée de l'espace normé $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$. Par la proposition 3.4, p. 32, S_1 est un compact de $\mathbb{K}^n$ et donc S est un compact de (E, N). L'application continue ν atteint donc ses bornes sur S. Soient $\alpha = \inf_{x \in S} \nu(x)$ et $\beta = \sup_{x \in S} \nu(x)$ et soit $x_\alpha \in S$ tel que $\nu(x_\alpha) = \alpha$. Puisque $N(x_\alpha) = 1 \neq 0$, le vecteur x_α n'est pas nul et donc $\alpha = \nu(x_\alpha) \neq 0$ car ν est une norme sur E. Donc $\alpha > 0$.

Si maintenant x est un point quelconque non nul de E, on a $x/N(x) \in S$ et donc

$$\alpha \leq \nu\left(\frac{x}{N(x)}\right) = \frac{\nu(x)}{N(x)} \leq \beta,$$

ce qui démontre que les normes N et ν sont équivalentes. □

Corollaire 3.13 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes définissent les mêmes ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts, denses,... ainsi que les mêmes suites convergentes.*

Remarquons que cette propriété est trivialement fausse en dimension infinie. Voir par exemple l'exercice qui suit la proposition 2.15, p. 23.

Corollaire 3.14 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Remarque Il ne faudrait pas déduire de ce qui précède que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les *distances* sont équivalentes. Il existe en effet des distances qui ne sont pas définies par des normes. Par exemple, la distance SNCF et la distance discrète sur $\mathbb{R}^2$ ne sont ni équivalentes entre elles, ni équivalentes aux distances définies par les normes. Mais, sauf mention contraire, un espace vectoriel de dimension finie est toujours muni d'une distance provenant d'une norme et en général, la norme choisie n'est pas précisée puisque toutes les propriétés topologiques n'en dépendent pas.

Corollaire 3.15 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration. Notons $\| \ \|$ la norme sur F. Soit $(e_1, \dots, e_n)$. Il est aisé de démontrer ce résultat si E est muni de la norme N définie par

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

En effet, si f est une application linéaire de E dans F et si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors

$$\|f(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\| \leq AN(x),$$

avec $A = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(e_i)\|$. Le cas général en découle par le théorème 3.12. □

Pour clore ce paragraphe, nous allons voir que la propriété énoncée dans le corollaire 3.14 est en fait une caractérisation des espaces normés de dimension finie. C'est le célèbre théorème de F. Riesz.

Théorème 3.16 (F. Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Remarquons que si la boule unité B de E est compacte, alors toute partie fermée et bornée de E l'est aussi, et réciproquement. En effet, si B est compacte, alors toute boule fermée centrée en 0 l'est aussi et donc tout fermé borné de E est contenu dans un compact, et est donc compact.

Démonstration. La démonstration présentée ici utilise le fait qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé dans tout espace normé qui le contient. Ce résultat, qui utilise le caractère complet des espaces normés de dimension finie, sera vu plus loin (cf. corollaire 4.20, p. 53).

Supposons donc que la boule unité B de E est compacte. Il existe alors une partie finie A de X telle que

$$B \subset \bigcup_{x \in A} B(x, 1/2) \;=\; A + \frac{1}{2}B.$$

Soit Y l'espace vectoriel (de dimension finie) engendré par A. Ainsi, $B \subset Y + 2^{-1}B$. On en déduit aisément par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $B \subset Y + 2^{-n}B$ et donc que

$$B \subset \bigcap_{n \geq 1} (Y + 2^{-n}B).$$

En particulier, si $x \in B$, alors pour tout $n \geq 1$ il existe un $y_n \in Y$ tel que $\|x - y_n\| < 2^{-n}$. On en déduit que $B \subset \bar{Y}$. Puisque Y est de dimension finie et donc fermé dans X, il en résulte que $B \subset Y$ et, par homogénéité, $X = Y$. $\square$

Exercice. Soit X un espace métrique et soit $E = C_b(X)$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{K}$, muni de la norme uniforme $\| \,.\, \|$. On suppose que X contient un point a non isolé et l'on fixe une suite (x_n) formée de points deux à deux distincts de X qui converge vers a. Si $f \in E$, on pose

$$L(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{2}\right)^n f(x_n).$$

1. Démontrer que L est une application linéaire continue de E dans $\mathbb{K}$, de norme 2 et que $\forall f \in \bar{B}(E)$, $|L(f)| < 2$. En déduire que $\bar{B}(E)$ n'est pas compact.

2. Soit $C = \{f \in E \;\text{ t.q. }\; L(f) = 2\}$. Démontrer que C est un convexe fermé non vide de E, que $\forall f \in C$, $\|f\| > 1$ et que $\inf_{f \in C} \|f\| = 1$. En déduire que, pour tout $r > 1$, $C \cap \overline{B}(0, r)$ n'est pas compact.

3.4. Le procédé d'extraction diagonale

Théorème 3.17 *Soit $(X_p, d_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et soit, pour tout entier naturel p, soit $(x_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X_p. Si pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{x_{n,p},\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans X_p, alors il existe une fonction strictement croissante ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $(x_{\phi(n),p})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans X_p.*

Précisons qu'une partie Y d'un espace métrique X est dite *relativement compacte* dans X si l'adhérence de Y dans X est compacte. En termes de suites, Y est relativement compact si et seulement si de toute suite de Y on peut extraire une suite convergente (dont la limite est dans X mais pas nécessairement dans Y).

La partie remarquable du théorème ci-dessus est que la fonction ϕ définissant les différentes suites extraites ne dépend pas de p.

Démonstration. Grâce à l'hypothèse de relative compacité, il est possible de construire par récurrence une suite décroissante (A_n) de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel p, la suite $(x_{n,p})_{n\in A_p}$ soit convergente dans X_p. Le *procédé d'extraction diagonale* consiste à définir l'application ϕ par

$$\phi(p) = \text{ le } (p+1)\text{-ième élément de } A_p.$$

Ainsi $\phi(p+1)$ est strictement supérieur au $(p+1)$-ième élément de A_{p+1}, qui est lui même supérieur au $(p+1)$-ième élément de A_p, c'est-à-dire $\phi(p)$. La fonction ϕ est donc strictement croissante. De plus, pour chaque entier naturel p la suite $(x_{\phi(n),p})_{n\geq p}$ est une suite extraite de la suite $(x_{n,p})_{n\in A_p}$, car si $n \geq p$, $\phi(n) \in A_n \subset A_p$; la suite $(x_{\phi(n),p})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. □

Considérons à nouveau une suite $(X_p, d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'espaces métriques (d_p étant la distance sur X_p) et posons $X = \prod_{p\in\mathbb{N}} X_p$, c'est à dire

$$X = \{x = (x_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ t.q. } \forall p \in \mathbb{N} \ \ x_p \in X_p\}.$$

On rappelle que la relation

$$d(x, y) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} \min(d_p(x_p, y_p), 1)$$

définit sur X une distance d ; c'est la *distance produit* sur X. Pour cette distance d une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X converge vers le point $x \in X$ si et seulement si pour tout entier naturel p on a : $\lim_{n\to\infty} x_p^n = x_p$.

On peut alors réexprimer le théorème précédent sous la forme suivante :

Corollaire 3.18 (Théorème de Tychonoff) *Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts et soit $X = \prod_{p\in\mathbb{N}} X_p$ muni de la distance produit. Alors X est compact.*

Cela découle immédiatement de la définition de la distance, du théorème 3.17 et de la caractérisation des compacts par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Exemple (exercice) Par ce qui précède, l'espace $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance produit :

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|$$

est compact.

a. Montrer que l'application de $\mathcal{C}$ dans l'intervalle $[0, 1]$ définie par

$$f(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n-1} x_n$$

est une injection continue dont l'image est l'*ensemble triadique de Cantor.* En déduire que l'ensemble de Cantor est homéomorphe à $\mathcal{C}$.

b. Démontrer que l'espace $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Indication. On pourra démontrer que l'application

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}})$$

est une bijection continue de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Une autre application de procédé diagonal est présentée à la page 48.

Une autre application du procédé diagonal : le théorème de Helly

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))$ est bornée.

1. Démontrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{Q} \cap I$, la suite $(f_{\phi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Pour de tels x, on note alors $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\phi(n)}(x)$.
2. On prolonge g sur I en posant, pour $x \in I \setminus \mathbb{Q}$,

$$g(x) = \sup\{g(y), \text{ avec } y \in \mathbb{Q} \cap I \text{ et } \; y < x\}.$$

Démontrer que $g(x)$ est bien défini pour tout $x \in I$ et que la fonction g est croissante sur I.
3. Soit C l'ensemble des points de I où g est continue. On sait que l'ensemble $D = I \setminus C$ est dénombrable. Démontrer que pour tout $x \in C$, la suite $(f_{\phi(n)}(x))$ converge vers $g(x)$.
Indication. Soit $x \in C$. Démontrer que si $y, z \in \mathbb{Q} \cap I$ et si $y < x < z$, alors

$$g(y) \leq \liminf_{n\to\infty}(f_{\phi(n)}(x)) \leq \limsup_{n\to\infty}(f_{\phi(n)}(x)) \leq g(z).$$

4. Par une nouvelle extraction diagonale, démontrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(\psi(n))})$ telle que pour tout $x \in I$, la suite $(f_{\phi(\psi(n))}(x))$ soit convergente.

Corrigé

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des éléments de $\mathbb{Q}\cap I$. On peut extraire de la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $(f_{\phi_0(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $p \geq 0$. Supposons construits $\phi_0, \dots \phi_p$, p fonctions croissantes de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, la suite $(f_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_k(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la suite $(f_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_p(n)}(x_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc on peut en extraire une sous-suite convergente. Il existe donc une fonction croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que $(f_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_{p+1}(n)}(x_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On a donc ainsi défini par récurrence une famille de fonction croissantes de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Considérons la fonction $\psi \; : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; n \mapsto \phi_0 \circ \ldots \circ \phi_n(n)$. Toute fonction croissante f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \; f(n) \geq n$, et la composée de fonctions croissantes est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; \phi_{n+1}(n+1) \geq n+1$ et donc $\psi(n+1) \geq \psi(n)$. D'autre part, à partir du rang p la suite $(f_{\psi(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(f_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_p(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge. Posons pour $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{\psi(n)}(x_p) = g(x_p)$.

2. Si $x, y \in I \cap \mathbb{Q}$ avec $x < y$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{\psi(n)}(x) < f_{\psi(n)}(y)$ et donc en passant à la limite sur n, $g(x) \leq g(y)$. Soit $x \in I \backslash \mathbb{Q}$. L'intervalle I est ouvert et $\mathbb{Q} \cap I$ est dense dans I. Donc il existe $x_0 > x$ et $x_0 \in \mathbb{Q} \cap I$. On a alors $g(y) \leq g(x_0)$ pour tout $y \in \mathbb{Q} \cap I$ tel que $y < x$. Donc $E_x = \{g(y),\ \text{avec } y \in \mathbb{Q} \cap I \text{ et } y < x\}$ est majoré. Il est non vide car I est ouvert et donc il admet bien une borne supérieure. L'application g est bien définie sur tout I en prenant $g(x) = \sup E_x$ pour $x \in I \backslash \mathbb{Q}$. En outre, pour $x \in I \backslash \mathbb{Q}$ et $x_0 \in \mathbb{Q} \cap I$, si $x < x_0$ alors $g(x_0) \geq g(x)$ et si $x > x_0$ alors $g(x_0) \leq g(x)$ par définition même de $g(x)$. Si x et x_0 sont tous deux dans $I \backslash \mathbb{Q}$ et $x < x_0$, on a $E_x \subset E_{x_0}$ et donc $g(x) \leq g(x_0)$.

3. Soit $x \in C$. Soient y et z dans $I \cap \mathbb{Q}$ tels que $y < x < z$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{\psi(n)}(y) \leq f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(z)$. Donc en passant aux limites on aura

$$\lim_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(y) \leq \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \lim_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(z).$$

On fait tendre y et z vers x tout en restant dans $I \cap \mathbb{Q}$ et comme g est continue en x on obtient

$$g(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq g(x).$$

Ceci prouve que $\liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) = \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) = g(x)$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x)$ existe et vaut $g(x)$.

4. On peut encore indexer les éléments de D à l'aide d'une partie dénombrable A de $\mathbb{N}$. En utilisant exactement le même procédé qu'à la première question on peut extraire de la suite $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(f_{\psi \circ \theta(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in D$, $f_{\psi \circ \theta(n)}(x)$ converge. Pour tous les autres points de I, $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(f_{\psi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et donc converge vers $g(x)$. On a donc finalement extrait de $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant simplement sur tout I.

4. Complétude

4.1. Espaces métriques complets, espaces de Banach

Suites de Cauchy

Définition 4.1 *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; t.q. \; \forall p, q \geq N \;\; d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Exemples (exercices)

1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance définie par
$$d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|,$$
la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.
3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,
$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2}{x_n + 3}$$
est une suite de Cauchy dans l'espace métrique $\mathbb{Q}$ muni de sa distance naturelle ($d(x, y) = |x - y|$) mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 4.2 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq N$, on ait $d(x_p, x_q) < 1$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in B(x_N, 1)$. Tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent donc à la boule de centre x_N et de rayon $R = \max\left(1, \max_{0\leq k<N} d(x_k, x_N)\right)$. Cette suite est donc bornée. □

Proposition 4.3 *Une suite de Cauchy converge si et seulement si elle admet au moins une valeur d'adhérence. (Et dans ce cas elle a exactement une valeur d'adhérence.)*

Démonstration. Que la condition est nécessaire est clair. Démontrons qu'elle est suffisante. Supposons donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et que la suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. Soient, d'une part, $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq K$, $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$ et, d'autre part, $N \geq K$ tel que, pour tous $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon/2$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. □

Espaces métriques complets

Définition 4.4 (Hausdorff, 1914) *Un espace métrique E est dit* complet *si, dans E, toute suite de Cauchy est convergente.*

Par exemple, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet (d'après l'exemple **c** ci-dessus) et $\mathbb{R}$ est complet. C'est essentiellement pour cela que toute l'analyse mathématique est effectuée dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{Q}$.

Exercice Démontrer que la relation

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$, puis que l'espace normé ainsi défini n'est pas complet.

Proposition 4.5 (Propriété des fermés emboités) *Un espace métrique E est complet si et seulement si toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de E dont le diamètre tend vers 0 admet une intersection non vide (et, en fait, réduite à un singleton).*

Précisons que le *diamètre* d'une partie A d'un espace métrique (E, d) est défini par $d(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$. On vérifie aisément que le diamètre d'une partie quelconque de E est égal au diamètre de son adhérence.

Démonstration. Soit d la distance sur E. Supposons E complet et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés de E dont le diamètre tend vers 0. Choisissons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un point x_n dans le fermé F_n. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy puisque, si $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $d(F_n) < \varepsilon$ et donc, pour tous $p, q \geq N$ tels que (par exemple) $p < q$, $d(x_p, x_q) \leq d(F_p) < \varepsilon$. Cette suite est donc convergente. Sa limite est, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, la limite de la suite $(x_n)_{n\geq N}$ qui est une suite de points de F_N. L'ensemble F_N étant fermé, on a $x \in F_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et donc l'intersection $\cap_{N\in\mathbb{N}} F_N$ est non vide.

Supposons réciproquement que toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de E dont le diamètre tend vers 0 admet une intersection non vide et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{\{x_p,\ p \geq n\}}$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, et donc admet une intersection non vide. En fait, l'hypothèse faite sur les diamètres des F_n assure que l'intersection est de diamètre 0, est donc qu'elle est réduite à un point. Ceci montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence et une seule. Elle est donc convergente. $\square$

Remarque La proposition ci-dessus est fausse si l'on ne suppose pas que le diamètre des F_n tend vers 0. Par exemple, la suite $([n, +\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés de l'espace complet $\mathbb{R}$ dont l'intersection est vide.

La proposition précédente, associée à la proposition 3.1, p. 30, montre en particulier ceci :

Proposition 4.6 *Tout espace métrique compact est complet.*

Par exemple, la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace complet. L'ensemble $C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance produit est complet.

Exercice Soit E un espace métrique.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que toutes les boules fermées de centre r sont compactes. Démontrer que E est complet.

2. On suppose seulement que, pour tout point $x \in E$, il existe $r_x > 0$ tel que $\overline{B}(x, r_x)$ soit compacte. Peut-on en déduire que E est complet ?

Un espace métrique complet n'est pas nécessairement compact (par exemple, $\mathbb{R}$ est complet mais pas compact). Le résultat suivant affirme en particulier que, pour qu'un espace complet soit compact, il suffit qu'il soit précompact (cf. page 20). Rappelons qu'un espace métrique compact est toujours précompact, mais que la réciproque n'est pas vraie en général, cf. page 30. Rappelons également qu'une partie d'un espace métrique est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

Théorème 4.7 *Soit X un espace métrique. Si X est complet, alors toute partie de X précompacte est relativement compacte.*

La démonstration de ce théorème est une application intéressante du procédé d'extraction diagonale.

Démonstration. Supposons que X est complet et que A soit une partie précompacte de X. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A. Pour démontrer que cette suite admet une sous-suite convergente, il suffit d'en extraire une sous-suite de Cauchy. Pour tout entier naturel p soient $A_1^p, \ldots, A_{N_p}^p$ des parties de A de diamètre inférieur ou égal à $1/(p+1)$ dont la réunion est égale à A. On construit alors par récurrence une suite décroissante $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que, pour chaque entier naturel p, il existe un entier $j \leq N_p$ pour lequel $\{x_p\}_{p\in B_p} \subset A_j^p$:
Construction de B_0 : comme tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui sont en nombre infini) sont contenus dans A qui est égal à la réunion des ensembles $A_1^0, \ldots, A_{N_0}^0$ (qui sont en nombre fini), il y a certainement au moins un de ces ensembles, par exemple $A_{j_0}^0$, qui contient un nombre infini de termes x_n. (C'est le principe des tiroirs : si une infinité de chaussettes est répartie dans un nombre fini de tiroirs, alors au moins un des tiroirs contient une infinité de chaussettes.) On pose alors

$B_0 = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \in A^0_{j0}\}$. Pour construire B_{p+1} à partir de la connaissance de B_p on procède de même : les termes de la suite extraite $(x_n)_{n \in B_p}$ sont tous contenus dans la réunion des ensembles $A_1^{p+1}, \ldots, A_{N_{p+1}}^{p+1}$ donc l'un de ceux-ci contient une infinité de termes de cette sous-suite. On note alors B_{p+1} l'ensemble des indices des termes correspondants.

Les B_p étant ainsi construits, on définit alors la fonction ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\phi(p) = \text{ le } (p+1)\text{-ième élément de } B_p.$$

Alors pour tout entier naturel p et pour tout entier $n \geq p$, $\phi(n) \in B_p$ et donc d'après la construction des B_p,

$$\forall n, n' \geq p \qquad d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(n')}) \leq \frac{1}{p+1}.$$

La suite $(x_{\phi(n)})$ est donc de Cauchy. □

Proposition 4.8 *Le produit de deux espaces métriques complets est complet.*

La démonstration est simple et laissée en exercice. Ceci montre en particulier que tous les espaces $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$ sont complets.

EXERCICE Démontrer qu'un produit dénombrable d'espaces complets (muni de la distance produit) est complet.

Espaces de Banach ; séries dans les espaces de Banach

Définition 4.9 *Un espace vectoriel normé qui est complet est appelé un* espace de Banach.

Par exemple, $\mathbb{R}$ est un espace de Banach. Un exemple important d'espace de Banach de dimension infinie est celui formé des fonctions continues d'un espace métrique compact K à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme uniforme, que l'on note $C^{\mathbb{K}}(K)$. La démonstration de ce que cet espace est complet se trouve à la section 4.2. ci-après.

Séries dans un espace de Banach

Définition 4.10 *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite* convergente *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est convergente, c'est-à-dire s'il existe un $S \in E$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) - S \right\| = 0.$$

Si c'est le cas, S s'appelle la *somme* de la série $\sum u_n$. Par ailleurs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des *sommes partielles* de la série $\sum u_n$.

Proposition 4.11 (Critère de Cauchy pour les séries) *L'espace E est un espace de Banach si et seulement si toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de E qui satisfait la condition suivante (appelée* critère de Cauchy*) :*

$$(*) \qquad \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall p \geq q \geq N, \ \left\| \sum_{k=q}^{p} u_k \right\| \leq \varepsilon$$

est convergente.

Démonstration. Remarquons que la condition $(*)$ est équivalent au fait que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est de Cauchy. La condition $(*)$ entraîne donc la convergence de la série dès que E est complet. Réciproquement, si toute série satisfaisant le critère de Cauchy est convergente, alors, puisque toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E peut s'écrire comme la suite des sommes partielles d'une certaine série de E (écrire $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ avec $u_0 = v_0$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = v_n - v_{n-1}$), il est certain que toute suite de Cauchy de E est convergente. $\square$

Définition 4.12 (Convergence absolue) *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite* absolument convergente *si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| < +\infty.$$

Remarquons que toute série absolument convergente satisfait le critère de Cauchy. En effet, si la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy (car $\mathbb{R}$ est complet) et donc, puisque

$$\left\| \sum_{k=q}^{p} u_k \right\| \leq \sum_{k=q}^{p} \|u_k\|,$$

il en est de même de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$. Donc, si E est complet, alors toute série de E absolument convergente est convergente. En fait, ces deux propriétés sont équivalentes :

Proposition 4.13 *L'espace normé E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.*

Démonstration. Il reste à démontrer que la condition est suffisante. Supposons donc que toute série de E absolument convergente est convergente et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. D'après la proposition 4.3, il nous suffit de montrer que cette suite admet une sous-suite convergente. Comme il s'agit d'une suite de Cauchy, on peut construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}}(u_{n_{k+1}} - u_{n_k})$ est alors absolument convergente, donc convergente. Soit S sa somme. On a alors

$$S = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) = \lim_{p\to+\infty} (u_{n_{p+1}} - u_{n_1}).$$

Par conséquent, la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. □

Un contrexemple (exercice) Soit $E = \mathbb{R}[x]$. **a.** Démontrer que la relation

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

définit une norme sur E.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n(x) = x^n/(n!)$. Démontrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente dans E mais non convergente. En déduire que l'espace normé $(E, \|\ \|)$ n'est pas un espace de Banach.

Parties fermés d'espaces complets. Sous-espaces complets d'un espace métrique

Proposition 4.14 *Soit (E, d) un espace métrique et soit F une partie de E.*

1. *Si (E, d) est complet et si F est fermé, alors l'espace métrique (F, d) est complet.*
2. *Si l'espace métrique (F, d) est complet, alors F est une partie fermée de (E, d).*

Dans cette proposition, nous avons noté (F, d) l'espace métrique F, muni de la distance induite par d sur F (qui en toute rigueur n'est pas la distance d mais la restriction de d à $F \times F$).

Démonstration. Le premier point ne pose aucun problème : une suite de Cauchy de (F, d) est une suite de Cauchy de (E, d) et donc converge ; sa limite appartient à F puisque F est fermé. Donc (F, d) est complet.

Supposons maintenant que (F, d) est complet et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers $x \in E$. La suite (x_n) étant convergente, elle est de Cauchy dans E et donc dans F. Comme (F, d) est complet, cette suite admet une limite dans F. Donc $x \in F$ (unicité de la limite) et F est fermé. □

Complétude et distances équivalentes, homéomorphismes

• Contrairement à la compacité, la complétude ne se conserve pas nécessairement lorsque l'on remplace une distance d par une distance équivalente d'. En effet, une suite peut être de Cauchy pour la distance d sans l'être pour d'. Par exemple, les deux distances d et d' définies sur $\mathbb{R}$ par

$$d(x,y) = |x-y|, \qquad d'(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$$

sont équivalentes, et donc définissent les mêmes suites convergentes. Par contre, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $(\mathbb{R}, d')$ mais elle ne l'est pas dans $(\mathbb{R}, d)$. On a malgré tout le cas particulier suivant :

Proposition 4.15 *Dans un espace vectoriel E, deux normes équivalentes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ définissent les mêmes suites de Cauchy. Par conséquent, l'espace normé $(E, \| \ \|)$ est complet si et seulement si $(E, \| \ \|')$ l'est aussi.*

Ceci se déduit aisément de la définition de l'équivalence de deux normes.

Corollaire 4.16 *L'espace vectoriel normé $\mathbb{K}^n$ est complet, quelle que soit la norme choisie.*

• Contrairement à la compacité, la complétude n'est pas une propriété conservée par homéomorphisme. Par exemple, $\mathbb{R}$ muni de sa distance naturelle est homéomorphe à l'espace $E =]-\pi/2, \pi/2[$, muni de la distance naturelle lui aussi, l'homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et E étant par exemple $x \mapsto \operatorname{Arctg} x$. Or $\mathbb{R}$ est complet mais E ne l'est pas puisque la suite (x_n) définie par $x_n = (\pi/2) - (1/n)$ est de Cauchy mais ne converge pas dans E.

Proposition 4.17 *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et ϕ un homéomorphisme de E sur F. Si F est complet et si l'image par ϕ de toute suite de Cauchy de E est une suite de Cauchy de F, alors E est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E. L'image par ϕ de (x_n) est de Cauchy dans l'espace complet F, donc elle converge. L'application ϕ^{-1} étant continue, ceci prouve que la suite (x_n) est convergente. □

Un exemple important d'application qui conserve les suites de Cauchy est celui des applications lipschitziennes (c'est clair). Or toute application linéaire continue d'un espace vectoriel normé dans un autre est lipschitzienne (proposition 2.23, p. 27). On en déduit ceci :

Proposition 4.18 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. S'il existe un homéomorphisme linéaire de E sur F et si E est complet, alors F est complet.*

Corollaire 4.19 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé de base $(e_1, \ldots, e_n)$. L'application ϕ de $\mathbb{K}^n$ dans E définie par $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un homéomorphisme linéaire de $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$ dans E, muni de la norme $N(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Donc E, muni de la norme N, est complet. Il est donc complet, quelle soit sa norme (cf. proposition 4.15). □

Exercice Une bijection ϕ entre deux espaces métriques (E, d) et (F, δ) est un *uniféomorphisme* si ϕ et ϕ^{-1} sont uniformément continus. Démontrer que si E est complet et s'il existe un uniféomorphisme entre E et F, alors F est complet.

Du dernier corollaire et de la proposition 4.15, on déduit ceci :

Corollaire 4.20 *Soit E un espace vectoriel normé. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est une partie fermée de E.*

4.2. Exemples d'espaces complets

Espaces vectoriels normés de dimension finie Le premier exemple fondamental d'espaces complets est celui des espaces vectoriels normés de dimension finie : cf. corollaire 4.19. Cette propriété des espaces normés de dimension finie admet une application importante, dans le cadre de la théorie des espaces préhilbertiens : le théorème de projection sur un sous-espace fermé de dimension finie (théorème 5.7, p. 77).

Espaces de fonctions : norme de la convergence uniforme

Proposition 4.21 *Si l'espace normé F est complet, alors l'espace $\mathcal{F}_b(E, F)$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de l'exemple de l'espace ℓ^∞, dont elle constitue une généralisation : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{F}_b(E, F)$, on commence à montrer, pour tout $x \in E$, que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc converge dans F (qui est complet) et l'on note $f(x)$ sa limite. On vérifie ensuite que la fonction f ainsi définie de E dans F appartient à l'espace $\mathcal{F}_b(E, F)$, puis que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme de cet espace. Vérifions rapidement ces trois points.

1. *Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.* En effet, $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. Comme F est complet, elle converge vers une limite que l'on note $f(x)$.

2. *La fonction f ainsi définie est bornée.* En effet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle est bornée dans $\mathcal{F}_b(E,F)$. Soit $A>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|\leq A$. Alors, si $x\in E$, on a $\|f_n(x)\|\leq\|f_n\|\leq A$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $\|f(x)\|\leq A$. Donc f est bornée et sa norme uniforme est majorée par A. Ainsi, $f\in\mathcal{F}_b(E,F)$.
3. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.* Soit $\varepsilon>0$. Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tous $n,m\geq N$, $\|f_n-f_m\|\leq\varepsilon$. Si $x\in E$, on a, pour tous $n,m\geq N$,

$$\|f_n(x)-f_m(x)\|\leq\|f_n-f_m\|\leq\varepsilon.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit que $\|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon$, pour tout $n\geq N$, et ceci pour tout $x\in E$. Par définition de la norme uniforme sur E, ceci montre que $\|f_n-f\|\leq\varepsilon$, pour tout $n\geq N$.

L'espace $\mathcal{F}_b(E,F)$ est donc complet. □

Dans la majorité des cas, l'espace F considéré dans les applications est $\mathbb{K}^n$.

Espaces de fonctions continues bornées

Corollaire 4.22 *On suppose que E est muni d'une structure d'espace métrique et que F est un espace de Banach.*

1. *L'espace $C_b(E,F)$ muni de la norme uniforme, est un espace de Banach.*
2. *En particulier, l'espace $C_b^{\mathbb{K}}(E)$, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach.*
3. *En particulier, si E est compact, l'espace $C^{\mathbb{K}}(E)$, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach.*

Les deux derniers points sont bien sûr des cas particuliers du premier (n'oublions pas que toute fonction continue sur un espace compact est bornée). Pour démontrer le premier, il suffit de vérifier que $C_b(E,F)$ est une partie fermée de l'espace de Banach $\mathcal{F}_b(E,F)$ (cf. proposition 4.14), ce qui est le sujet du lemme suivant.

Lemme 4.23 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans F qui converge uniformément vers la fonction $f\ :E\to F$. Alors la fonction f est continue.*

Démonstration. La démonstration est identique au cas connu où $E=F=\mathbb{R}$. Rappelons-la pour mémoire. Soit $x_0\in E$. Montrons que f est continue en x_0 et pour cela, soit $\varepsilon>0$. Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, $\|f_n-f\|\leq\varepsilon/3$, c'est-à-dire : Par hypothèse, la fonction f_{n_0} est continue en x_0. Donc il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in E$ tel que $d(x_0,x)\leq\alpha$,

$$\|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)\|\leq\frac{\varepsilon}{3},$$

où d représente la distance sur l'espace métrique E. Or pour tout $x \in E$,

$$\|f(x_0) - f(x)\| \leq \|f(x_0) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f(x)\|.$$

Donc si de plus $d(x_0, x) \leq \alpha$, on peut majorer chacun des trois termes par $\varepsilon/3$ et donc $\|f(x_0) - f(x)\| \leq \varepsilon$, ce qui démontre le lemme. □

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la proposition suivante.

Corollaire 4.24 *Soit $a \in \mathbb{R}$. L'espace vectoriel $C_a^{\mathbb{K}}$ formé des fonctions continues a-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ est un espace de Banach.*

Exercices

1. Démontrer que l'espace $C^{\mathbb{K}}([0,1])$, muni de la norme $\| \ \|_p$, avec $1 \leq p < \infty$, n'est pas complet.
2. Démontrer que $C_0^{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, muni de la norme uniforme, est complet, mais que $C_c^{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ ne l'est pas.

Espaces d'applications linéaires continues Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On note à nouveau $L(E,F)$ l'espace vectoriel formé des applications linéaires continues de E dans F, que l'on munit de la norme définie à la page 27.

Proposition 4.25 *Si F est un espace de Banach, alors il en est de même de l'espace $L(E,F)$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L(E,F)$. On vérifie d'abord que, pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F : ceci est simplement dû à ce que, si $p, q \in \mathbb{N}$, alors

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\| \ \|x\|.$$

Par conséquent, cette suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puisque F est complet, vers une limite que l'on note $f(x)$. On vérifie ensuite par un simple passage à la limite que la fonction f ainsi définie est linéaire : si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda x + \mu y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \mu \lim_{n\to+\infty} f_n(y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que f est continue : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est de Cauchy, est bornée dans $L(E,F)$ par une constante $M > 0$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout

$x \in E$, $\|f_n(x)\| \leq M\|x\|$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|$. Donc f est bien continue et sa norme est majorée par M. Il reste à vérifier que la suite (f_n) converge vers f dans $L(E, F)$. Or, si $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \geq N$ et tout $x \in B(0, 1)$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$. Il suffit maintenant de faire tendre m vers l'infini pour voir que, pour tout $n \geq N$, $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$. □

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, ce résultat s'exprime sous la forme suivante :

Corollaire 4.26 *Le dual topologique d'un espace de Banach est un espace de Banach.*

Problème

Soit E un espace de Banach. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E, que l'on munit de la norme définie par :

$$\|T\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

1. Soient $T, S \in L(E)$. Démontrer que $\|T \circ S\| \leq \|T\| \ \|S\|$.

2. Si $T \in L(E)$, on définit, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'application T^n par récurrence de la manière suivante :

$$T^0 = I \qquad \text{et, pour tout } \ n \in \mathbb{N}^*, \quad T^n = T^{n-1} \circ T,$$

où I représente l'application identité de E dans E. Vérifier que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$T^n T^m = T^m T^n = T^{n+m}.$$

3. Soit $T \in L(E)$ tel que $\|T\| < 1$. Démontrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$ converge dans l'espace $L(E)$, et que la somme de cette série, notée S, satisfait l'égalité suivante :

$$S \circ (I - T) = (I - T) \circ S = I.$$

4. Une application $T \in L(E)$ est dite inversible s'il existe $S \in L(E)$ tel que $T \circ S = S \circ T = I$. On note O l'ensemble des éléments de $L(E)$ inversibles. En utilisant la question précédente, démontrer que I est un point intérieur à O.

5. Soit $T_0 \in O$ et soit $T \in L(E)$ tel que $\|T\| \ < 1/\|T_0^{-1}\|$. Démontrer que $T_0 - T$ est inversible. (Utiliser la question c.)

6. Démontrer que O est une partie ouverte de $L(E)$.

Application : Exponentielle d'endomorphisme Soit E un espace de Banach. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E, que l'on munit de la norme uniforme. On rappelle que l'espace normé ainsi défini est un espace de Banach et que l'on a, pour tous $u, v \in L(E)$, $\|u \circ v\| \leq \|u\| \, \|v\|$. Si $u \in L(E)$, on définit

$$e^u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^n}{n!},$$

les endomorphismes u^n étant définis par récurrence par $u^0 = Id$ (l'application identité de E) et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u \circ u^n = u^n \circ u$. Puisque $\|u^n/(n!)\| \leq \|u\|^n/(n!)$, on voit que la série qui définit e^u est absolument convergente dans l'espace de Banach $L(E)$, donc convergente, et ceci pour tout $u \in L(E)$. L'élément e^u de $L(E)$ ainsi défini s'appelle l'*exponentielle* de u. On voit en particulier que e^u est une application linéaire continue.

Exemples (exercices)

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $e^{\lambda Id} = e^{\lambda} Id$.

2. Dans toutes les questions suivantes, on suppose que $E = \mathbb{K}^n$. Démontrer que si u a pour matrice dans une certaine base de E la matrice diagonale $A = \text{diag } (d_1, \ldots, d_n)$, alors e^u a, dans cette même base, la matrice $e^A = \text{diag } (e^{d_1}, \ldots, e^{d_n})$.

3. Calculer l'exponentielle de la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

L'exponentielle d'une matrice $n \times n$ est définie, on l'aura deviné, en identifiant celle-ci avec l'endomorphisme qu'elle définit dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

4. Soit I la matrice identité de $\mathbb{R}^n$ et soit $N = (n_{i,j})$ la matrice $n \times n$ définie par $n_{i,j} = 0$ si $j \neq i+1$, $n_{i,i+1} = 1$, pour tous i, j. Calculer l'exponentielle de la matrice $I + M$.

5. Utiliser le théorème de décomposition de Jordan pour calculer l'exponentielle d'un endomorphisme quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 4.27 *Si u, v sont deux éléments de $L(E)$ qui commutent (c.-à-d. tels que $u \circ v = v \circ u$), alors $e^u \circ e^v = e^{u+v}$.*

Démonstration. Cette proposition est une conséquence très simple du théorème suivant :

Théorème 4.28 (Produit de Cauchy de deux séries) *Considérons $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de $L(E)$, de sommes respectives s et s'. La série de terme général*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 = \sum_{k+k'=n} u_k v_{k'}$$

est absolument convergente et sa somme est égale à ss'. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée le produit de Cauchy *des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.*

La démonstration de ce théorème est est identique à celle faite pour les séries numériques, nous laissons au lecteur consciencieux le soin de la refaire dans cas.

Remarquons que nous pouvons appliquer ce théorème ici car les deux séries définissant e^u et e^v sont absolument convergentes. D'après ce théorème nous avons $e^u \circ e^v = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$, avec

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\frac{v^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k} = \frac{(u+v)^n}{n!},$$

ce qui démontre la proposition. Rappelons que nous avons le droit d'utiliser ici la formule du binome de Newton car les deux endomorphismes u et v commutent. $\square$

Corollaire 4.29 *Pour tout $u \in L(E)$, e^u est un endomorphisme inversible, d'inverse e^{-u}.*

Démonstration. En effet, $e^u \circ e^{-u} = e^{u-u} = e^0 = Id$. $\square$

Exercice Soit $u \in L(E)$.

1. Démontrer que l'application f_u de $\mathbb{R}$ dans $L(E)$ définie par $f_u\ : x \mapsto e^{xu}$ est un homomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(L(E), \circ)$. Démontrer de plus que f_u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par $f'_u\ : x \mapsto u \circ e^{xu}$.
2. Soit $a \in E$. Démontrer que l'application $\phi\ : x \mapsto e^{xu}(a)$ est l'unique application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E satisfaisant l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi'(x) = u(\phi(x))\ ; \qquad\qquad \phi(0) = a.$$

Espaces L^p de Lebesgue, $p \in [1, +\infty]$ Soit m une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et soit $p \in [1, +\infty]$. L'espace $L^p_{\mathbb{K}}(m)$ a été défini à la page 7.

Théorème 4.30 (Riesz-Fischer) *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $L^p_{\mathbb{K}}(m)$, muni de la norme N_p, est complet.*

Démonstration. D'après le théorème 4.13, p. 50, il suffit de démontrer que toute série normalement convergente dans $L^p(m)$ est convergente. Soit pour cela $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(m)$ telle que la série numérique $\sum N_p(f_k)$ soit convergente. Notons

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} N_p(f_k).$$

Nous voulons démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k,$$

admet une limite dans $L^p(m)$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} |f_k| \quad \text{et} \quad g = \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k|.$$

La fonction g peut prendre des valeurs finies ou infinies.

– *Cas* $p < \infty$. D'après le théorème de convergence monotone, on a :

$$\int |g|^p \; dm = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p dm.$$

Or, d'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$N_p(g_n) \leq \sum_{k=0}^{n} N_p(f_k) \leq A.$$

Par conséquent, $g \in L^p(m)$ et $N_p(g) \leq A$. En particulier, g prend des valeurs finies m-presque-partout. Notons $N = \{x \in \Omega;\; g(x) = +\infty\}$. Alors $m(N) = 0$. Ainsi, pour tout $x \notin N$, la série $\sum |f_k(x)|$ est convergente et donc la série numérique $\sum f_k(x)$ est absolument convergente et donc convergente. Notons, pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) & \text{si } x \notin N \\ 0 & \text{si } x \in N. \end{cases} \tag{3}$$

Comme $|f| \leq g$, on voit que $f \in L^p(m)$. Il reste à vérifier que la suite (g_n) converge vers f dans $L^p(m)$, ou encore, que :

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - S_n|^p dm = 0.$$

Il suffit pour cela de constater que $|f - S_n|^p \leq (2g)^p$ et d'appliquer le théorème de convergence dominée.

– *Cas* $p = \infty$. Pour m-preque tout $x \in \Omega$, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} N_\infty(f_k) = A. \tag{4}$$

Ceci est dû à ce qu'une union dénombrable d'ensembles de mesures nulles est de mesure nulle : soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, N_k l'ensemble (négligeable) des

$x \in \Omega$ tels que $|f_k(x)| > N_\infty(f_k)$. Alors l'inégalité (4) est satisfaite pour tout $x \notin N$, où $N = \cup_{k\in\mathbb{N}} N_k$. Ainsi, la série numérique $\sum f_k(x)$ est absolument convergente, et donc convergente, pour tout $x \notin N$. Définissons la fonction f comme dans la relation (3) ci-dessus. Alors $|f| \leq A$ et donc $f \in L^\infty(m)$. Enfin, pour tout $x \notin N$,

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} N_\infty(f_k).$$

Donc

$$N_\infty(f - S_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} N_\infty(f_k) \to 0,$$

puisque le reste d'ordre n d'une série numérique convergente tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

□

4.3. Le théorème du point fixe de Banach Une application f d'un espace métrique (E, d) dans lui-même (par exemple) est dite *contractante* si elle est lipschitzienne, de rapport strictement inférieur ou égal à 1.

Attention : pour que f soit contractante, il ne suffit pas que, pour tous $x, y \in E$, on ait $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Une telle application f est en effet seulement lipschitzienne de rapport 1. (On pourra considérer par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+4}$.)

Théorème 4.31 *Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et soit f une application de E dans E. Si f est contractante, alors f admet un point fixe et un seul, c'est-à-dire qu'il existe un point unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$. Plus précisément, si a est ce point fixe, alors a est la limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$; enfin, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une telle suite et si $L \in [0, 1[$ est un rapport de Lipschitz de f, alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(*) \qquad d(x_n, a) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-L} L^n.$$

Il est important de remarquer que ce théorème n'est pas seulement un résultat abstrait d'existence et d'unicité de la solution d'une certaine équation du type $f(x) = x$, puisqu'il fournit un procédé constructif permettant de déterminer des valeurs approchées de la solution a de cette équation, avec un ordre de précision arbitraire : si l'on veut connaître une valeur approchée de a avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε, il suffit de calculer un certain nombre n de termes d'une certaine suite, l'inégalité $(*)$ assurant que le degré de précision requis sera atteint dès que

$$\frac{d(x_0, x_1)}{1-L} L^n \leq \varepsilon.$$

Cette méthode de recherche approchée de la solution d'une équation s'appelle la *méthode des approximations successives.*

Démonstration. Soit x_0 un point quelconque de E et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Soit $L > 0$ un rapport de Lipschitz de f strictement inférieur à 1. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $d(x_n, x_{n+1}) \leq Ld(x_{n_1}, x_n) \leq \ldots \leq L^n d(x_0, x_1)$. Donc, si p et q sont deux entiers tels que $p < q$ (par exemple), alors

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \left(\sum_{k=p}^{q-1} L^k\right) d(x_0, x_1).$$

Par conséquent, on a

$$(**) \qquad\qquad d(x_p, x_q) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - L} L^p.$$

Comme la suite $(L^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, ceci montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme E est complet, cette suite converge. Soit a sa limite. Alors, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on voit que $a = f(a)$ (on utilise ici le fait que f est continue en a, ce qui est vrai puisque f est lipschitzienne). Donc a est un point fixe pour f. L'unicité d'un tel point fixe découle simplement de ce que, si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, alors $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq Ld(a, b)$ et donc, puisque $L < 1$, $d(a, b) = 0$, d'où $a = b$. Enfin, la majoration de l'erreur $(*)$ s'obtient en faisant tendre q vers l'infini dans l'inégalité $(**)$. □

Exercices

1. En utilisant la méthode des approximations successives, déterminer un valeur approchée de la solution de l'équation $\cos x = x$ à 10^{-5} près. (Tout le problème consiste ici à trouver un bon espace E sur lequel appliquer le théorème, puisque la fonction cosinus n'est pas contractante sur $\mathbb{R}$. Il faut choisir E de la forme $[a, b]$.)

2. Même question avec l'équation $x^2 = e^{x-1}$. Ici, le problème essentiel est de mettre cette équation sous la forme $f(x) = x$, avec f convenable.

3. On suppose que (E, d) est un espace métrique compact et que f est une application continue de E dans E.

  a. On suppose que, pour tous $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Démontrer que f admet un point fixe unique.

  b. Démontrer que ce résultat est faux si l'on suppose seulement E complet.

  c. Démontrer que ce résultat peut être faux si l'on suppose simplement E compact et f continue.

4. Démontrer que toute application continue de $[0,1]$ dans lui-même admet un point fixe.

5. Si n et p sont deux entiers naturels, on définit :

$$d(n,p) = 10 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}.$$

Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$ et que $\mathbb{N}$ muni de cette distance est complet. Soit de plus f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par : $f(0) = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $f(n) = n+1$. Vérifier que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $d(f(n), f(p)) < d(n,p)$, que f admet un point fixe unique mais que pour tout n_0 différent de ce point fixe, la suite définie par $x_0 = n_0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ n'est pas convergente.

6. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$A(x,y) = y(3+\cos x), \qquad B(x,y) = \frac{1}{4}e^{-xy}.$$

a. On pose $K = [0,1] \times [0,1/4]$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\sup_{(x,y)\in K} \left|\frac{\partial}{\partial x}A(x,y)\right| \leq \frac{1}{4}; \qquad \sup_{(x,y)\in K} \left|\frac{\partial}{\partial y}A(x,y)\right| \leq 4;$$
$$\sup_{(x,y)\in K} \left|\frac{\partial}{\partial x}B(x,y)\right| \leq \frac{1}{16}; \qquad \sup_{(x,y)\in K} \left|\frac{\partial}{\partial y}B(x,y)\right| \leq \frac{1}{4}.$$

b. On définit la fonction F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = (A(x,y), B(x,y)).$$

Démontrer que $F(K) \subset K$.

c. On note : $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ et $\|(x,y)\|_{(1)} = |x|/8 + |y|$. Démontrer que F n'est pas contractante sur K muni de la norme $\|\ \|_1$ (on pourra calculer la distance de $F(0,0)$ à $F(0,1/4)$), mais qu'elle est contractante sur K muni de la distance induite par la norme $\|\ \|_{(1)}$.

d. Démontrer que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution de l'équation :

$$(E) \qquad \begin{cases} x = y(3+\cos x), \\ y = e^{-xy}/4, \end{cases}$$

alors, nécessairement, $(x,y) \in K$. En déduire que l'équation (E) a une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

7. On considère les normes sur $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|),$$

ainsi que :

$$\|(x,y)\|_p^* = p|x| + |y|,$$

où p est un réel strictement positif.

On pose également :

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{16} + \frac{1}{4}\cos 2x, 2x + \frac{1}{4}\sin y\right).$$

a. Calculer $F(0,0)$ et $F(\pi,0)$ et montrer que F n'est pas contractante de $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_1)$, ni de $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_2)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_2)$, ni de $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_\infty)$.

b. Démontrer que, si p est convenablement choisi, la fonction F est contractante de $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_p^*)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_p^*)$.

c. La fonction F admet-elle des points fixes ? Si oui, combien ?

8. Soient $I = [a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Démontrer que si $|\lambda|(b-a) < 1$, alors il existe une unique fonction $u \in C(I)$ telle que :

$$\forall x \in I \qquad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sin(x\, u(t))\, dt.$$

9. Soit (E,d) un espace métrique complet et soit f une application de E dans E. On suppose que, pour un certain entier n, la fonction $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (itérée n fois) est strictement contractante. Démontrer que f admet un point fixe unique dans E.

10. Soient $I = [0,a]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

a. Si $u \in C(I)$, on définit, pour chaque $x \in I$:

$$(Tu)(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \sin(x\, u(t))\, dt.$$

Vérifier que la fonction Tu ainsi définie est continue sur I.

b. Soient u et v deux fonctions continues sur I. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in I \qquad |(T^n u)(x) - (T^n v)(x)| \leq \frac{|\lambda|^n x^{2n}}{3.5.7.\ldots(2n-1)} \|u - v\|_\infty.$$

En déduire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel T^n est une application strictement contractante sur $C(I)$, muni de la norme uniforme.

c. Démontrer qu'il existe une unique fonction $u \in C(I)$ telle que $T(u) = u$.

Application : le théorème de Cauchy-Lipschitz Une application importante du théorème du point fixe de Banach est le théorème de Cauchy-Lipschitz, sur l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles. La démonstration de ce théorème est un peu lourde dans toute sa généralité. Pour simplifier les choses, nous allons démontrer ce théorème sous des hypothèses plus resctrictives. Cela dit, le principe de la démonstration est le même que dans le cas général.

Le problème étudié est celui de la recherche des solutions du problème :

$$(*) \qquad y'(x) = f\,(x, y(x))\,, \qquad y(x_0) = y_0.$$

On suppose connus l'instant initial $x_0 \in \mathbb{R}$, la valeur initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et la fonction $f\ : (x,y) \mapsto f(x,y)$, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$; une solution du problème $(*)$ dans l'intervalle $[a,b]$ contenant x_0 est, par définition, une fonction y de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ satisfaisant la condition $(*)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Nous allons démontrer la version suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Proposition 4.32 *Soient a, b, x_0 trois réels tels que $a \leq x_0 \leq b$. Si f est une application continue de $[a,b] \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ Lipschitzienne en sa deuxième variable, c'est-à-dire telle qu'il existe une constante L pour laquelle*

$$(5) \qquad \forall x \in [a,b],\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \qquad \|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|,$$

alors le problème $(*)$ admet une solution unique dans $[a,b]$.

(Nous renvoyons au cours sur les équations différentielles pour l'énoncé le plus général.) Dans l'énoncé ci-dessus, la norme $\|\ \|$ représente une norme (arbitraire) de $\mathbb{R}^d$.

La démonstration de ce théorème apparaîtra comme un corollaire de la version suivante du théorème du point fixe :

Lemme 4.33 *Soit (E,d) un espace complet non vide et soit f une application de E dans E. S'il existe un entier n tel que la fonction f^n est contractante, alors f admet un point fixe et un seul dans E.*

La notation f^n représente bien sûr l'itérée n-ième de f.

Démonstration. Appliquons le théorème du point fixe à la fonction f^n. Il nous assure de l'existence et de l'unicité du point fixe de f^n, que nous notons a. Tout point fixe de f étant un point fixe de f^n, ceci montre l'unicité du point fixe de f, s'il existe. Il suffit maintenant de vérifier que a est un point fixe de f. Comme $f^n(a) = a$, on a $f^{n+1}(a) = f(a)$, ou encore $f^n(f(a)) = f(a)$. Donc $f(a)$ est un point fixe pour f^n. Puisque a est le seul point fixe de f^n, on a donc $f(a) = a$. □

Avant de démontrer la proposition 4.32, constatons que si f est continue, une fonction y de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ est solution du problème $(*)$ si et seulement si elle est continue sur $[a,b]$ et si

$$(**) \qquad \forall x \in [a,b] \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

C'est la *formulation intégrale* du problème $(*)$. (Remarquer en particulier que si f et y sont continues, la relation $(**)$ indique que y est nécessairement de classe C^1.) Cette expression $(**)$ montre que les solutions de notre problème $(*)$ sont exactement les points fixes dans l'espace $E = C([a,b], \mathbb{R}^d)$ de l'application F qui à tout $y \in E$ associe la fonction $F(y)$ définie par

$$\forall x \in [a,b] \qquad F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

L'espace E muni de la norme uniforme étant complet, il nous suffit donc de vérifier que la fonction F satisfait les hypothèses du lemme 4.33.

Soient y_1 et y_2 deux éléments de E. Nous noterons également $\| \ \|$ la norme uniforme sur E. Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned} \| F(y_1)(x) - F(y_2)(x)\| &\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\|dt \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} \| y_1(t) - y_2(t)\|dt \leq L|x - x_0| \ \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

On en déduit aisément par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in [a,b] \qquad \|F^n(y_1)(x) - F^n(y_2)(x)\| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} L\|y_1 - y_2\|.$$

Par conséquent,

$$\|F^n(y_1) - F^n(y_2)\| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} L\|y_1 - y_2\|.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(b-a)^n}{n!} = 0$. On peut donc choisir un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $L\frac{(b-a)^n}{n!} < 1$. Pour un tel n, l'application F^n est contractante sur E. Le lemme 4.33 montre alors que F admet un point fixe unique dans E, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.32.

Exercice Soient K une fonction continue de $[a,b]^2$ dans $\mathbb{R}$, g une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une et une seule fonction continue $f \ : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,y)f(y)dy.$$

4.4. Prolongement par continuité d'une application uniformément continue Soit F une partie dense d'un espace métrique (E,d) et soit f une application continue de (F,d) à valeurs dans un espace métrique (G,δ). Le problème est de trouver des prolongements continus de f à l'espace E entier, c'est-à-dire des applications $\tilde{f}$, continues de (E,d) dans (G,δ), dont la restriction à F est égale à E.

La permière constatation simple est que, puisque F est dense dans E, un tel prolongement $\tilde{f}$ est unique, s'il existe. Le théorème suivant fournit une condition suffisante pour l'existence de $\tilde{f}$.

Théorème 4.34 (Prolongement par continuité) *On suppose que F est dense dans E, que G est complet, et que f est uniformément continue de F dans G. Alors il existe une application continue $\tilde{f}$ et une seule, de E dans G, dont la restriction à F est égale à f. Cette application $\tilde{f}$ est elle-même uniformément continue de E dans G.*

Démonstration. Il s'agit tout d'abord de définir $\tilde{f}(x)$, pour tout $x \in E \setminus F$. Soit donc $x \in E \setminus F$. L'espace F étant dense dans E, on peut choisir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers x. L'application f étant uniformément continue, elle transforme une suite de Cauchy en une suite de Cauchy. Puisque la suite (x_n) converge, elle est de Cauchy. Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet G ; donc elle converge vers une limite $y \in G$. Nous posons alors $\tilde{f}(x) = y$. Pour que cette définition soit consistante, il faut vérifier que le point y ne dépend pas du choix de la suite (x_n) de F qui converge vers x. Soit pour cela (x'_n) une autre suite de F qui converge vers x et soit y' la limite de la suite $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. Nous allons vérifier que $\delta(y, y') < \varepsilon$. Soit d'abord $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, $\delta(f(x_n), y) < \varepsilon/3$ et $\delta(f(x'_n), y') < \varepsilon/3$. L'application f étant uniformément continue sur F, on peut choisir de plus $\eta > 0$ tel que, pour tous $z, z' \in F$, $d(z, z') < \eta \Rightarrow \delta(f(z), f(z')) < \varepsilon/3$. Choisissons enfin $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq N$, $d(x_n, x) < \eta/2$ et $d(x'_n, x) < \eta/2$. Alors, si n est un entier tel que $n \geq \max(N, M)$, on a

$$d(x_n, x'_n) \leq d(x_n, x) + d(x, x'_n) < \eta,$$

donc $\delta(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon/3$ et, par conséquent,

$$\delta(y, y') \leq \delta(y, f(x_n)) + \delta(f(x_n), f(x'_n)) + \delta(f(x'_n), y') < \varepsilon.$$

Donc $\delta(y, y') < \varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $y = y'$. L'application $\tilde{f}$ est donc définie sans ambigüité. Il reste à vérifier qu'elle est uniformément continue. Soit pour cela $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, x' \in F$,

$$d(x, x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Soient maintenant x, x' deux points de E tels que $d(x, x') < \eta$ et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F qui convergent vers, respectivement, x et x'. Choisissons un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq N$, $d(x, x_n) < (\eta - d(x, x'))/2$ et $d(x', x'_n) < (\eta - d(x, x'))/2$. Alors, pour $n \geq N$, on $d(x_n, x'_n) < \eta$ et donc $\delta(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon$. Un passage à la limite lorsque n tend vers l'infini montre alors que $\delta(y, y') \leq \varepsilon$, ce qui démontre que $\tilde{f}$ est uniformément continue. $\square$

EXERCICE Démontrer que, si de plus f est lipschitzienne, alors $\tilde{f}$ l'est aussi.

Toute application linéaire continue étant lipschitzienne et donc uniformément continue, on déduit du théorème ci-dessus le corollaire qui suit :

Corollaire 4.35 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E et soit f une application linéaire continue de F dans un espace vectoriel normé G. Si F est dense dans E et si G est complet, alors il existe une application linéaire continue $\tilde{f}$ et une seule de E dans G dont la restriction à F est égale à f. De plus, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Démonstration. La seule chose à démontrer est que l'application $\tilde{f}$ dont l'existence et l'unicité sont garanties par le théorème ci-dessus est linéaire et que les normes de f et de $\tilde{f}$ sont égales. La linéarité se démontre sans difficulté : si $x, x' \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, si de plus la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F qui tend vers x et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F qui tend vers x', alors la suite $(\lambda x_n + \mu x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F qui tend vers $\lambda x + \mu x'$. Donc, par construction de $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to+\infty} f(\lambda x_n + \mu x'_n) = \lambda \tilde{f}(x) + \mu \tilde{f}(x').$$

(La dernière égalité provient de la linéarité de f et de la définition de $\tilde{f}(x)$ et de $\tilde{f}(x')$.) Donc $\tilde{f}$ est linéaire. Déterminons enfin sa norme. On a :

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|\tilde{f}(x)\|.$$

Comme $F \subset E$ et comme f et $\tilde{f}$ coïncident sur F, alors clairement, $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$. Vérifions l'inégalité inverse. Soit x un vecteur de E de norme 1 et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|\tilde{f}(x_n)\| = \|f(x_n)\| \leq \|f\|\|x_n\|.$$

En faisant tendre n vers l'infini, ce qui est possible car toutes les applications considérées ici sont continues, on obtient $\|\tilde{f}(x)\| \leq \|f\|\|x\|$. Donc $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. □

Application : l'intégrale de Riemann de fonctions à valeurs dans un espace de Banach (exercice) Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. On cherche à définir l'intégrale d'une fonction continue et plus généralement d'une fonction réglée de $[a, b]$ dans E.

1. *Intégrale d'une fonction en escalier.* Une fonction en escalier de $[a, b]$ dans E est une fonction constante par morceaux, c'est-à-dire une fonction telle qu'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ et des vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de E tels que, pour tout $i \leq n-1$ et tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $f(x) = v_i$. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)v_i.$$

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a, b]$, que l'on munit de la norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$. Vérifier que I est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans E, de norme $b-a$. Vérifier également que si $f \in \mathcal{E}$, alors pour α, β, γ réels quelconques dans $[a, b]$,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

(relation de Chasles), où l'on convient de noter, si $u > v$,

$$\int_u^v f(x)dx = -\int_v^u f(x)dx.$$

2. Une fonction de $[a, b]$ dans E est dite *réglée* si et seulement si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier. Vérifier que toute fonction continue de $[a, b]$ dans E est réglée.

3. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonctions réglées de $[a, b]$ dans E. Démontrer que $\mathcal{R}$ est un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{F}_b([a, b], E)$ muni de la norme uniforme. Ainsi, $\mathcal{R}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

4. *Intégrale d'une fonction réglée.* Démontrer que I se prolonge de manière unique sur $\mathcal{R}$ en une application linéaire continue J de norme $b-a$. Pour chaque $f \in \mathcal{R}$, l'image de f par cette application est évidemment notée

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

5. Vérifier que la relation de Chasles écrite plus haut est valable pour toutes les fonctions réglées. Vérifier également que si F est une forme linéaire continue sur E et si $f \in \mathcal{R}$, alors $F \circ f$ est une fonction réglée de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ et

$$F(J(f)) = \int_a^b F(f(x))dx.$$

6. Démontrer que pour toute fonction f de $\mathcal{R}$,

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx.$$

4.5. Le théorème de Baire Soit X un espace métrique quelconque. Deux joueurs, Pierre et Paul, jouent au jeu suivant (appelé *jeu de Choquet*) : Pierre choisit un ouvert U_1 non vide dans X, puis Paul choisit un ouvert non vide V_1 inclus dans U_1, puis Pierre choisit un ouvert non vide U_2 inclus dans V_1, et ainsi de suite. À la fin de la partie les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides (U_n) et (V_n) telles que pour tout entier n,

$$U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1}.$$

Remarquer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Notons U cet ensemble. Pierre a gagné la partie si U est vide et Paul si U n'est pas vide. On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner à tous les coups, quelle que soit la façon de jouer de son adversaire. Ainsi, il est impossible que les deux joueurs aient une stratégie gagnante. Par contre, il n'est a priori pas certain que l'un des deux en ait une.

1. Démontrer que si dans l'espace X il y a un ouvert non vide O qui est une réunion dénombrable de fermés F_n d'intérieurs vides, alors Pierre a une stratégie gagnante.

Indication. Pierre commence à jouer $U_1 = O$ et à chaque choix V_n de Paul, Pierre répond $V_n \setminus F_n$.

2. Démontrer que si X est complet, Paul a une stratégie gagnante.

Indication. Si (F_n) est une suite décroissante de fermés de X dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection des F_n n'est pas vide.

3. *Application : le théorème de Baire.* Soit X un espace complet. Démontrer qu'aucun ouvert de X n'est la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

4. On suppose ici que X est localement compact, c'est-à-dire que tout point de X admet au moins un voisinage compact. Démontrer qu'alors Paul a une stratégie gagnante. En déduire que dans X aucun ouvert n'est réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

Indication. L'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides n'est jamais vide.

5. Supposons que $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle. Démontrer que X n'est ni complet, ni localement compact, mais que pourtant Paul a une stratégie gagnante et que donc le théorème de Baire est vrai dans X.

Indication. Numéroter les rationnels : $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'à chaque choix U_n de Pierre, Paul peut répondre par $V_n = I_n \setminus \mathbb{Q}$, où I_n est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ tel que $\bar{I}_n \setminus \mathbb{Q} \subset U_n$, $d(I_n) \leq 1/n$ et $r_n \notin \bar{I}_n$.

6. *Corollaire : le théorème de Banach-Steinhaus.* Soient E un espace de Banach, F une espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $L(E, F)$ telle que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{\|T_n(x)\|,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Démontrer que $\{\|T_n\|,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Indication. Démontrer qu'il existe une entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel l'ensemble $F_k = \{x \in E \ \text{ t.q. } \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \|T_n(x)\| \leq k\}$ est d'intérieur non vide et donc contient une certaine boule $B(a, r)$, puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{r}\left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \|T_m(a)\| + k\right).$$

7. Démontrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir une famille génératrice dénombrable. Par exemple $\mathbb{R}[X]$ ne peut être muni d'une structure d'espace de Banach.

Indication. Si ce n'était pas le cas cet espace serait une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

8. Démontrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut être une réunion dénombrable de compacts.

9. Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus d'un espace de Banach E dans un espace vectoriel normé F tels que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))$ est convergente. Démontrer que l'application T de E dans F définie par $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ est linéaire et continue.

10. *Convergence faible dans les espaces L^p. Exemples.* Soient $p \in [1, \infty]$ et p' son exposant conjugué : $(1/p + 1/p' = 1$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(m)$ *converge faiblement* vers l'élément f de $L^p(m)$ si

$$\forall g \in L^{p'}(m) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int f_n g\, dm = \int f g\, dm.$$

Pour distinguer, on dira ici qu'une suite de $L^p(m)$ converge fortement dans $L^p(m)$ si elle converge au sens de la convergence dans l'espace normé $L^p(m)$.

a. Démontrer que toute suite de $L^p(m)$ fortement convergente est faiblement convergente.

b. On suppose que m est la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ et que $1 < p \leq \infty$. Soit $f \in L^p$, nul à l'extérieur de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et de norme 1 dans L^p. Soit, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n^{d/p} f(nx)$. Démontrer que la suite (f_n) est une suite de norme 1 dans L^p qui converge presque partout et faiblement dans L^p vers 0, mais pas fortement.

c. Démontrer que toute suite de $L^p(m)$ qui converge faiblement est bornée.

d. On suppose que $1 < p \leq \infty$. Démontrer qu'une suite (f_n) de ℓ^p converge faiblement vers $f \in \ell^p$ si et seulement si elle est bornée et si

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(i) = f(i).$$

e. Donner un exemple dans ℓ^2 d'une suite qui converge faiblement mais pas fortement.

f. *Lemme de Schur.* Démontrer qu'une suite de ℓ^1 converge faiblement si et seulement si elle converge fortement (vers la même limite).

Indication. Supposer que ce n'est pas le cas.

i. Démontrer qu'alors il existe une suite (f_n) d'éléments de ℓ^1 de norme 1 qui converge faiblement vers 0 et donc, en particulier, telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_n(i) \to 0$.

ii. Construire par récurrence deux suites d'entiers strictement croissantes, (I_j) et (n_j), telles que pour tout entier j,

$$\sum_{i=0}^{I_{j-1}} |f_{n_j}(i)| \leq \frac{1}{5}, \qquad \sum_{i=I_j+1}^{+\infty} |f_{n_j}(i)| \leq \frac{1}{5}.$$

iii. Soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant les propriétés suivantes : si i est tel que $I_{j-1} < i \leq I_j$, alors $|h(i)| = 1$ et $f_{n_j}(i)h(i) = |f_{n_j}(i)|$. Démontrer que pour tout entier j,

$$\sum_{i=I_{j-1}+1}^{I_j} f_{n_j}(i)h(i) \geq \frac{3}{5}$$

et en déduire que

$$\left|\sum_{i=0}^{+\infty} f_{n_j}(i)h(i)\right| \geq \frac{1}{5}.$$

iv. En déduire que la suite (f_{n_j}) ne converge pas faiblement vers 0 et conclure.

5. Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert

5.1. Définitions, propriétés élémentaires, exemples On considère, dans tout ce chapitre, un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *produit scalaire* sur E toute application $(. | .)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ telle que

1. pour tout $y \in E$, l'application $(. |y) \quad : E \to \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto (x|y)$ est linéaire ;

2. – si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\forall x, y \in E$, $(y|x) = (x|y)$ (propriété de *symétrie*) ;
– si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\forall x, y \in E$, $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (propriété d'*antisymétrie*, ou de *symétrie hermitienne*) ;

3. pour tout $x \in E$, $(x|x) \in \mathbb{R}^+$;

4. pour tout $x \in E$, $(x|x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Une application satisfaisant les propriétés **1.**, **2.** et **3.** (mais pas nécessairement **4.**) est appelée un **semi-produit scalaire**.

Le couple constitué d'un espace E et d'un produit scalaire sur E est appelé *espace préhilbertien réel* (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou *complexe* (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On omet le qualificatif *réel* ou *complexe* s'il n'y a pas de confusion possible ou si $\mathbb{K}$ n'a pas besoin d'être précisé.

Remarque. Supposons que $(. | .)$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait les propriétés a et b. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in E$, l'application $(x| .) \quad : y \mapsto (x|y)$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$(x|\lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}(x|y) + \bar{\mu}(x|z).$$

Dans ce cas, l'application $(x| .)$ est dite *antilinéaire*. Comme conséquence des propriétés a et b, on voit aussi que, pour $x, y \in E$:
– si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $(x + y|x + y) = (x|x) + (y|y) + 2(x|y)$;
– si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $(x + y|x + y) = (x|x) + (y|y) + 2\,\Re\mathrm{e}(x|y)$.

Exemples

1. Soit $E = \mathbb{R}^d$. Si $a_1, \dots, a_d$ sont des réels positifs ou nuls, la relation $(x|y) = \sum_{j=1}^d a_j x_j y_j$ définit sur E un semi-produit scalaire, qui est un produit scalaire si et seulement si tous les a_j sont strictement positifs.
Dans le cas où $a_j = 1$ pour tout j, l'espace E, muni de ce produit scalaire, est appelé l'*espace euclidien canonique* de dimension d.
Si $E = \mathbb{C}^d$ et $a_1, \dots, a_d \geq 0$, on définit de même, par la relation $(x|y) = \sum_{j=1}^d a_j x_j \bar{y}_j$, un semi-produit scalaire sur E qui est un produit scalaire si tous les a_j sont strictement positifs. Si $a_j = 1$ pour tout j, l'espace E, muni de ce produit scalaire, est appelé l'*espace hermitien canonique* de dimension d.

2. Soient $a > 0$ et $E = C_a^{\mathbb{K}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ continues et périodiques de période a. La relation

$$(f|g) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)g(x)\,dx \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R},$$
$$(f|g) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

définit sur E une structure d'espace préhilbertien.

3. Soient m une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $L^2_{\mathbb{K}}(m)$ l'espace, déjà introduit à la page 8, des (classes de) fonctions f de Ω dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$-mesurables et de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\int |f|^2 dm < +\infty$. On munit cet espace du produit scalaire défini par

$$(f|g) = \int fg\, dm \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\ ;$$
$$(f|g) = \int f\overline{g}\, dm \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Nous voyons que $(f|f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ m-presque partout, c'est-à-dire si $f = 0$ puisque dans $L^2(m)$ les fonctions égales m-presque partout sont identifiées.

4. (Un cas particulier de l'exemple précédent.)

Soit ϕ une application continue d'un intervalle réel I dans $]0, +\infty[$. La mesure définie sur I par :

$$m(A) = \int_A \phi(x)\ dx$$

définit, comme ci-dessus, l'espace que nous noterons $L^2_\phi(I)$ (cette notation n'est pas standard), formé des fonctions f Lebesgue-mesurables de I dans $\mathbb{K}$ telles que la quantité

$$\|f\|_\phi = \int_I |f(x)|^2 \phi(x) dx$$

est finie. Le produit scalaire sur cet espace est défini par

$$(f|g)_\phi = \int_I f(x)g(x)\phi(x)\, dx \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\ ;$$
$$(f|g)_\phi = \int_I f(x)\overline{g(x)}\phi(x)\, dx \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Notons que, puisque $\phi > 0$, deux fonctions sont égales m-presque partout si et seulement si elles sont égales presque-partout pour la mesure de Lebesgue.

5. Comme autre cas particulier de l'exemple 3, considérons ℓ^2 l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients complexes et de carré sommable, c'est-à-dire telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < +\infty$. Il est muni d'une structure d'espace pré-hilbertien avec le produit scalaire défini par

$$(x|y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\ ;$$
$$(x|y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y}_n \qquad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Nous savons que $\ell^2 = L^2(m)$, où m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Plus généralement, si I est un ensemble quelconque, la *mesure de comptage* sur I est la mesure m sur la tribu discrète $\mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$ (ensemble des parties de I) définie par $m(A) = \text{card}\,(A) \leq +\infty$. Les fonctions sur I sont en général notées de façon indicielle : $x = (x_i)_{i\in I}$ et, si x est à valeurs positives, on utilise la notation $\sum_{i\in I} x_i$ pour représenter $\int xdm \leq +\infty$. On vérifie aisément qu'alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \sum_{i\in J} x_i \leq +\infty,$$

où $\mathcal{P}_f(I)$ est l'ensemble des parties finies de I. Si $p \geq 1$, L'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ est ici noté $\ell^p_{\mathbb{K}}(I)$ et, pour tout $x \in \ell^1_{\mathbb{K}}(I)$, on note $\sum_{i\in I} x_i = \int xdm$.
Le seul ensemble négligeable pour la mesure m étant l'ensemble vide, on a aussi $L^2_{\mathbb{K}}(m) = \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$, qui est donc muni d'une structure d'espace préhilbertien avec le produit scalaire défini par

$$(x|y) = \sum_{i\in I} x_i y_i \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \;;$$
$$(x|y) = \sum_{i\in I} x_i \overline{y}_i \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

On supprime l'argument I des notations lorsque $I = \mathbb{N}$.

Exercice Soit x une fonction de I dans $\mathbb{R}^+$. Démontrer que si $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$, alors l'ensemble J défini par $J = \{i \in I \text{ t.q. } x_i \neq 0\}$ est dénombrable.

Indication. Vérifier que J est la réunion des ensembles E_n définis pour chaque entier naturel strictement positif n par $E_n = \{i \in I \text{ t.q. } x_i > 1/n\}$.

Une propriété fondamentale des semi-produits scalaires est la suivante.

Proposition 5.1 (Inégalité de Schwarz) *Soit E un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$ on a*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y).$$

Démonstration. Soient $x, y \in E$. On peut supposer $(y|y) \neq 0$ car, sinon, l'inégalité recherchée est évidente. Notons :

$$p = \frac{(x|y)}{(y|y)} y.$$

Le problème revient à démontrer que $(p|p) \leq (x|x)$. Tout d'abord, un calcul simple montre que $(x - p|p) = 0$. On en déduit que :

$$(x|x) = (x - p + p|x - p + p) = (x - p|x - p) + (p|p),$$

ce qui démontre le résultat attendu puisque $(x - p|x - p) \geq 0$. □

Corollaire 5.2 *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$. La relation $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ définit une norme sur E.*

Démonstration. Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire. Or

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}(x|y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square\end{aligned}$$

Dans la suite, si E est un espace préhilbertien, on notera (sauf précision contraire) $(\,.\,|\,.\,)$ le produit scalaire sur E et $\|\,.\,\|$ la norme associée. On peut remarquer que la donnée de la norme sur E permet de retrouver le produit scalaire, par exemple dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\Re\mathrm{e}(x|y) &= \frac{1}{2}\left((\|x+y\|)^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \ ; \\ \Im\mathrm{m}(x|y) &= \frac{1}{2}\left((\|x+iy\|)^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).\end{aligned}$$

Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé **espace de Hilbert**. Donnons-en les exemples fondamentaux.

1. Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

2. Si m est une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$, l'espace $L^2(m)$ muni du produit scalaire défini dans l'exemple 3 ci-dessus est un espace de Hilbert., en vertu du théorème de Riesz-Fischer (Th. 4.30, p.58).

En particulier, l'espace $\ell^2(I)$ (cf. exemple 5 ci-dessus) est un espace de Hilbert, pour tout ensemble I. (Ce cas particulier est en fait le cas général, cf. théorème 5.22 plus bas et exercice 5.6., p. 94).

Exemples

1. Si $E = C_a^{\mathbb{K}}$ (exemple 2 ci-dessus), la norme est donnée par

$$\|f\| = \left(\int_0^a |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ϕ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. La norme dans l'espace préhilbertien $L^2_\phi(I)$ défini à l'exemple 4, p. 73 est donnée par

$$\|f\|_\phi = \left(\int_I |f(x)|^2 \phi(x) dx\right)^{1/2}.$$

3. Si $E = \ell^2$ (cf. exemple 5, p. 73),

$$\|u\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2\right)^{1/2}.$$

Corollaire 5.3 *Soit E un espace préhilbertien. Pour chaque $y \in E$, la forme linéaire $\phi_y = (\,.\, |y)$ est continue et sa norme dans le dual topologique E' de E est égale à $\|y\|$.*

Démonstration. Par l'inégalité de Schwarz, $|\phi_y(x)| \leq \|x\| \, \|y\|$ pour tout $x \in E$ et donc $\phi_y \in E'$ et $\|\phi_y\| \leq \|y\|$. Par ailleurs, $\phi_y(y) = \|y\|^2$ et donc $\|\phi_y\| = \|y\|$. □

Ainsi, l'application $y \mapsto \phi_y$ est une isométrie de E dans E', linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 5.4 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz) *Soient x et y deux éléments d'un espace préhilbertien E. Alors $|(x|y)| = \|x\|.\|y\|$ si et seulement si x et y sont liés.*

Démonstration. La condition est clairement suffisante. Démontrons qu'elle est nécessaire. Supposons par exemple que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $|(x|y)| = \|x\|.\|y\|$. Soit ε un nombre complexe de module 1 tel que $\Re\mathrm{e}(\varepsilon(x|y)) = |(x|y)|$. Alors $\|(\|x\|y - \varepsilon\|y\|x)\|^2 = 0$ (il suffit de développer le carré) et donc $\|x\|y - \varepsilon\|y\|x = 0$. □

Une conséquence immédiate mais utile de la définition de la norme d'un espace préhilbertien est l'*identité du parallélogramme* :

Proposition 5.5 *Si x et y sont deux éléments quelconques d'un espace préhilbertien, alors*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Orthogonalité Deux éléments x et y d'un espace préhilbertien E sont dits *orthogonaux* si $(x|y) = 0$. La relation d'orthogonalité ainsi définie, notée $\perp$, est bien sûr symétrique. L'*orthogonal* d'une partie A de E est, par définition, l'ensemble noté $A^\perp$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A. Ainsi, avec les notations du corollaire 5.3,

$$A^\perp = \bigcap_{y \in A} \mathrm{Ker}(\phi_y).$$

Il en résulte que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. D'autre part, $x \in A^\perp$ si et seulement si $A \subset \mathrm{Ker}\, \phi_x$, c'est-à-dire, puisque $\mathrm{Ker}\, \phi_x$ est un sous-espace fermé, si et seulement si $\overline{[A]} \subset \mathrm{Ker}\, \phi_x$ (où $[A]$ est l'espace vectoriel engendré par A). Donc

$$A^\perp = (\overline{[A]})^\perp.$$

Une conséquence immédiate de l'orthogonalité de deux vecteurs est le *théorème de Pythagore* :

Proposition 5.6 *Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace préhilbertien, alors*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ce résultat s'étend par récurrence à un nombre fini de vecteurs deux à deux orthogonaux $x_1, \dots, x_n$: $\| \sum_{j=1}^n x_j \|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$.

Exercices

1. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. Démontrer que la norme $\|.\|$ provient d'un produit scalaire si et seulement si elle satisfait l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et que dans ce cas le produit scalaire qui définit $\|.\|$ est le suivant :

$$(*) \qquad (x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

Indication. Pour démontrer que la condition est suffisante on pourra considérer l'application $(\,.\,|\,.\,)$ définie en $(*)$ et démontrer successivement qu'elle satisfait les propriétés suivantes :

a. pour tout $x \in E$, $(x|x) = \|x\|^2$;

b. pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x|y) = \overline{(y|x)}$;

c. pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $(x+y|z) = 2(x|z/2) + 2(y|z/2)$;

d. pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$;

e. pour tout $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$.

2. Démontrer que si (x_n) et (y_n) sont deux suites contenues dans la boule unité d'un espace préhilbertien telles que $(x_n|y_n) \to 1$ alors $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. *Cube de Hilbert.* Soient $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et C l'ensemble des éléments x de ℓ^2 tels que $|x_n| \le |c_n|$ pour tout entier naturel n. Démontrer que C est compact.
Indication. Utiliser le théorème de Tychonoff.

5.2. Théorème de projection Un des outils principaux qui font l'intérêt de la structure pré-hilbertienne est le théorème de projection. On suppose ici que E est un espace préhilbertien et l'on note $(\,.\,|\,.\,)$ son produit scalaire, $\|\,.\,\|$ sa norme et d la distance définie par cette dernière.

Théorème 5.7 *Soit F un sous-espace vectoriel complet de E et C une partie fermée, convexe et non vide de E contenue dans F. Alors, pour tout point x de E, il existe un unique point y de C tel que*

$$\|x-y\| = d(x,C).$$

Ce point, appelé projection de x sur C *et noté $P_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante :*

$$(*) \qquad y \in C \quad et \quad \forall z \in C \quad \Re\mathrm{e}(x-y|z-y) \le 0.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Démontrons d'abord l'existence de la projection de x sur C. Par définition de $\delta = d(x, C)$, il existe une suite (y_n) de C telle que

$$\forall n \geq 1 \qquad \|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}.$$

En appliquant l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - y_n$ et $x - y_p$, pour $n, p \geq 1$, on obtient

$$\left\|x - \frac{y_n + y_p}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_p}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2\right).$$

Puisque C est convexe, $(y_n + y_p)/2$ est un point de C et donc

$$\frac{1}{4}\|y_n - y_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right),$$

ce qui démontre que la suite (y_n) est une suite de Cauchy de C. L'ensemble étant une partie fermée de l'espace complet F, cette suite converge vers un élément y de C qui vérifie certainement $\|x - y\|^2 = \delta^2$.

Supposons ensuite que deux points y_1 et y_2 de C sont tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta$. En appliquant l'identité du parallélogramme comme précédemment, on obtient $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, c'est-à-dire $y_1 = y_2$, ce qui démontre l'unicité de $P_C(x)$.

Vérifions maintenant que le point $y = P_C(x)$ satisfait la propriété $(*)$. Si $z \in C$, alors pour tout $t \in]0, 1]$, le point $(1 - t)y + tz$ appartient à C (qui est convexe) et donc

$$\|x - (1 - t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

soit, en développant,

$$t^2\|y - z\|^2 + 2t\,\Re\mathrm{e}\,(x - y|y - z) \geq 0.$$

En divisant par t puis en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\Re\mathrm{e}(x - y|z - y) \leq 0.$$

Supposons réciproquement qu'un point y de C satisfait $(*)$. Alors, pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}(x - y|y - z) \geq \|x - y\|^2\end{aligned}$$

et donc $y = P_C(x)$. □

Remarque 1. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la caractérisation $(*)$ (où $\Re\mathrm{e}$ ne figure pas) exprime que $P_C(x)$ est l'unique point y de C tel que, pour tout $z \in C$, l'angle des vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (*i.e.* supérieur ou égal à $\pi/2$).

Remarque 2. Le théorème est en particulier vrai si C est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

La condition $(*)$ permet de démontrer que P_C est une contraction (et donc, en particulier, est continue).

Proposition 5.8 *Sous les hypothèses du théorème 5.7, on a*

$$\forall x_1, x_2 \in E \qquad \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Démonstration. Notons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$. Tout d'abord,

$$\begin{array}{rcl} \Re\mathrm{e}(x_1 - x_2|y_1 - y_2) & = & \Re\mathrm{e}(x_1 - y_2|y_1 - y_2) + \Re\mathrm{e}(y_2 - x_2|y_1 - y_2) \\ & = & \Re\mathrm{e}(x_1 - y_1|y_1 - y_2) + \|y_1 - y_2\|^2 + \Re\mathrm{e}(y_2 - x_2|y_1 - y_2) \\ & \geq & \|y_1 - y_2\|^2. \end{array}$$

Donc, par l'inégalité de Schwarz, $\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|.\|y_1 - y_2\|$ et, finalement, $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. □

On considère maintenant le cas des projections sur des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 5.9 *Soit F un sous-espace vectoriel complet de E. Alors P_F est une application linéaire continue de E sur F. Si $x \in E$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tel que*

$$y \in F \quad \textit{et} \quad x - y \in F^{\perp}.$$

Démonstration. La condition $(*)$ du théorème 5.7 s'écrit

$$y \in F \quad \text{et} \quad \forall z \in F \quad \Re\mathrm{e}(x - y|z - y) \leq 0.$$

Or si $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $z' \mapsto z = y + \bar{\lambda} z'$ est une bijection de F sur F. La condition $(*)$ est donc équivalente à

$$y \in F \quad \text{et} \quad \forall z' \in F \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Re\mathrm{e}[\lambda(x - y|z')] \leq 0,$$

ce qui équivaut manifestement à

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^{\perp}.$$

La linéarité de P_F s'en déduit aisément. □

Corollaire 5.10 *Pour tout sous-espace vectoriel complet F de E,*

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

et le projecteur sur F associé à cette somme directe est P_F.

Démonstration. Si $x \in E$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et, par la proposition 5.9, $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. D'autre part, si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $(x|x) = 0$ et donc $x = 0$. □

Sous les hypothèses précédentes, P_F est appelé **projecteur orthogonal** sur F.

Corollaire 5.11 *Si E est complet, alors, pour tout sous-espace vectoriel F de E,*

$$E = \bar{F} \oplus F^{\perp}.$$

En particulier, F est dense dans E si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. Il suffit de se rappeler que $F^{\perp} = \bar{F}^{\perp}$. □

Corollaire 5.12 *Si E est un espace de Hilbert et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{F} = F^{\perp\perp}$.*

Démonstration. On a clairement $F \subset F^{\perp\perp}$ et donc, puisque $F^{\perp\perp}$ est fermé, $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$. D'autre part, on a à la fois $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$ et $E = F^{\perp\perp} \oplus F^{\perp}$. On en déduit immédiatement le résultat. □

Exercices

1. Soit E un espace de Hilbert.

a. Soient C_1 et C_2 des parties convexes, fermées et non vides de E telles que $C_1 \subset C_2$. Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$\|P_{C_1}(x) - P_{C_2}(x)\|^2 \leq 2\left(d(x, C_1)^2 - d(x, C_2)^2\right).$$

Indication. Appliquer l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - P_{C_1}(x)$ et $x - P_{C_2}(x)$.

b. Soient (C_n) une suite croissante de convexes fermés non vides et C l'adhérence de leur réunion.

i. Démontrer que C est un convexe fermé.

ii. Démontrer que pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)$.
Indication. Commencer par démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, C_n) = d(x, C).$$

c. Soient (C_n) une suite décroissante de convexes fermés non vides et C leur intersection.

i. Démontrer que si C n'est pas vide, alors pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x).$$

ii. Démontrer que si C est vide, alors pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x, C_n) = +\infty.$$

(Ceci démontre en particulier que si l'un des C_n est borné, alors C n'est pas vide. Remarquer que ce résultat est faux si l'on suppose simplement que E est un espace de Banach : considérer par exemple $E = C([0,1])$ et $C_n = \{f \in E \text{ t.q. } |f| \leq 1,\ f(0) = 1 \text{ et } \forall x \geq 1/n\ f(x) = 0\}$.)

2. **a.** Soit a un élément non nul d'un espace de Hilbert E. Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$d(x, \{a\}^{\perp}) = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}.$$

b. Soit F le sous-espace vectoriel de $E = L^2([0,1])$ (cf. p. 90) défini par

$$F = \{f \in E \text{ t.q. } \int_0^1 f(x)dx = 0\}.$$

Déterminer $F^{\perp}$. Calculer la distance à F de l'élément f de E défini par $f(x) = e^x$.

3. Soient m une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de Ω formant une partition de Ω. Pour chaque entier naturel n on définit :

$$E_n = \left\{ f \in L^2(m)\ \ ,\ \int_{\Omega \setminus A_n} |f| dm = 0 \right\}.$$

Démontrer que les E_n sont deux à deux orthogonaux et que leur réunion engendre un sous-espace dense dans $L^2(m)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ expliciter la projection orthogonale de $L^2(m)$ sur E_n.

4. Soit P une application linéaire continue d'un espace de Hilbert E dans lui-même.

a. Démontrer que P est un projecteur orthogonal (sur un sous-espace fermé de E) si et seulement si $P^2 = P$ et $\|P\| \leq 1$.

b. Démontrer que si P est un projecteur orthogonal, alors

$$\forall x, y \in E \quad (Px|y) = (x|Py) = (Px|Py).$$

5. Soit c_{00} l'ensemble des suites presque nulles de nombres complexes, que l'on munit du produit scalaire suivant :

$$(x|y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \overline{y_i}.$$

Soit f la forme linéaire sur c_{00} définie par

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x_i}{i+1}.$$

a. Démontrer que f est continue.

b. Soit $F = \operatorname{Ker} f$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel fermé strict de c_{00} et que $F^\perp = \{0\}$. (L'hypothèse que E est complet ne peut donc être supprimée de l'énoncé du corollaire 5.10.)

5.3. Théorème de représentation de Riesz On suppose dans ce paragraphe que E est un espace de Hilbert. Le théorème de représentation de Riesz énoncé ci-dessous décrit le dual topologique de E.

Théorème 5.13 (Riesz) *L'application de E dans E' définie par $y \mapsto \phi_y = (\,.\,|y)$ est une isométrie surjective. En d'autres termes, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E, il existe un unique $y \in E$ tel que*

$$\forall x \in E \qquad \phi(x) = (x|y)$$

et, de plus, $\|\phi\| = \|y\|$.

Démonstration. Le caractère isométrique a été vu au corollaire 5.3. Démontrons la surjectivité. Soit $\phi \in E'$ tel que $\phi \neq 0$. On sait (corollaire 5.10) que $E = \operatorname{Ker}\phi \oplus (\operatorname{Ker}\phi)^\perp$ puisque, ϕ étant continue, $\operatorname{Ker}\phi$ est fermé. Vérifions tout d'abord que l'espace $(\operatorname{Ker}\phi)^\perp$ est de dimension 1. Soit e un élément non nul de $(\operatorname{Ker}\phi)^\perp$. Remarquons que $\phi(e) \neq 0$. Pour tout $x \in (\operatorname{Ker}\phi)^\perp$, nous voyons que

$$x - \frac{\phi(x)}{\phi(e)}e \in \operatorname{Ker}\phi \cap (\operatorname{Ker}\phi)^\perp,$$

et donc, par conséquent, $x = \frac{\phi(x)}{\phi(e)}e$. L'espace $(\operatorname{Ker}\phi)^\perp$ est donc engendré par le vecteur e, que l'on peut choisir de norme 1. Soit $y = \overline{\phi(e)}e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $y = \phi(e)e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors $\phi_y(e) = \phi(e)$ et $\phi_y = 0$ sur $\operatorname{Ker}\phi$. Il en résulte que ϕ_y et ϕ coïncident sur $(\operatorname{Ker}\phi)^\perp$ et sur $\operatorname{Ker}\phi$, et donc $\phi = \phi_y$. $\square$

Rappelons que cette isométrie est linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous étudions dans la suite de ce paragraphe quelques applications importantes du théorème 5.13.

5.4. Opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert Rappelons que $L(E)$ désigne l'espace des applications linéaires continues (ou opérateurs) de E dans E. On note par le même symbole la norme dans E et la norme associée dans $L(E)$. On désigne par I l'identité de E.

Proposition 5.14 *Pour tout $T \in L(E)$ il existe un unique opérateur $T^* \in L(E)$ tel que*

$$\forall x, y \in E \qquad (Tx|y) = (x|T^*y).$$

*L'opérateur T^* est appelé l'***adjoint** *de T. De plus, $\|T^*\| = \|T\|$.*

Démonstration. Soit $y \in E$. L'application $\phi_y \circ T \ : x \mapsto (Tx|y)$ est un élément de E' et donc par le théorème 5.13 il existe un unique élément de E, que l'on note T^*y, tel que

$$\forall x \in E \qquad (Tx|y) = (x|T^*y)$$

et de plus $\|T^*y\| = \|\phi_y \circ T\| \leq \|y\|.\|T\|$. L'unicité d'un tel T^*y permet de voir facilement que T^* est linéaire ; d'autre part, par l'inégalité précédente, $\|T^*\| \leq \|T\|$. Par ailleurs, si $x \in E$,

$$\|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = (x|T^*Tx) \leq \|x\| \, \|T^*\| \, \|Tx\|,$$

ce qui entraîne que $\|Tx\| \leq \|x\| \, \|T^*\|$ et donc $\|T\| \leq \|T^*\|$. □

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la définition de l'adjoint.

Proposition 5.15 *L'application de $L(E)$ dans lui-même définie par $T \mapsto T^*$ est une application linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. C'est en outre une isométrie involutive (*i.e. *pour tout $T \in L(E)$, $T^{**} = T$).*
De plus, $I^* = I$ et $\forall T, S \in L(E)$, $(TS)^* = S^*T^*$.

5.5. Convergence faible dans un espace de Hilbert On dit qu'une suite (x_n) de E **converge faiblement** vers $x \in E$ si

$$\forall y \in E \qquad \lim_{n\to+\infty} (x_n|y) = (x|y).$$

L'élément x est alors appelé la **limite faible** de la suite (x_n). Il est clair qu'une suite ne peut avoir qu'au plus une limite faible.

On déduit immédiatement de l'inégalité de Schwarz qu'une suite (x_n) de E qui converge vers un point x de E au sens de la norme de E (*i.e.* $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$) converge aussi faiblement vers x. La réciproque est en général fausse. Par exemple, on vérifie aisément que la suite (x_n) de l'espace $E = \ell^2$ définie par

$$(x_n)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

converge faiblement vers 0 alors que pour tout n, $\|x_n\| = 1$. Pour ces raisons, on dit parfois qu'une suite de E qui converge au sens de la norme est **fortement convergente**.

La proposition qui suit précise le rapport entre convergence faible et convergence forte.

Proposition 5.16 *Soit (x_n) une suite de E faiblement convergente vers x. Alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n\| \geq \|x\|.$$

De plus, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *la suite* (x_n) *converge (fortement) vers* x *;*

2. $\limsup_{n\to+\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ *;*

3. $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Démonstration. Tout d'abord,

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to+\infty} |(x|x_n)| \leq \|x\| \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|,$$

ce qui prouve le premier point. D'autre part, $\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\,\Re\mathrm{e}(x_n|x)$ et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \|x - x_n\|^2 \leq \left(\limsup_{n\to+\infty} \|x_n\|\right)^2 - \|x\|^2,$$

ce qui démontre l'équivalence entre les propriétés 1 et 2. L'équivalence entre 2 et 3 en découle immédiatement. □

Le résultat qui suit est une conséquence du théorème de représentation de Riesz. Sa démonstration fait usage du procédé d'extraction diagonale vu dans le chapitre consacré à la compacité. .

Théorème 5.17 (Banach-Alaoglu) *De toute suite bornée de* E *on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Supposons d'abord que E est séparable et soit $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dense de E.. Soit (x_n) une suite bornée de E. Nous utilisons le procédé d'extraction diagonale pour construire une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{\phi(n)}|e_p)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente : comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $((x_n|e_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{K}$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E), on peut construire, par récurrence sur p, une suite décroissante $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $((x_n|e_p))_{n\in A_p}$ est convergente. L'application ϕ définie par :

$$\phi(p) = \text{ le } (p+1)\text{-ième élément de } A_p$$

satisfait la propriété requise. Soit D le sous-espace vectoriel de E engendré par la suite $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Par linéarité du produit scalaire, nous voyons que, pour tout $y \in D$, la suite $((x_{\phi(n)}|y))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démontrons maintenant que la suite $((x_{\phi(n)}|y))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc converge, pour tout $y \in E$. Soit donc $y \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. Notons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$. Par hypothèse, D est dense dans E. Soit $z \in D$ tel que $\|y - z\| \leq \varepsilon/(3M)$. La suite $((x_{\phi(n)}|z))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est donc de Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq N$,

$$|((x_{\phi(p)} - x_{\phi(q)}|z))| \leq \varepsilon/3.$$

Alors, pour tous $p, q \geq N$:

$$\begin{aligned}
|((x_{\phi(p)} - x_{\phi(q)}|y))| &\leq |((x_{\phi(p)} - x_{\phi(q)}|z))| + |((x_{\phi(p)} - x_{\phi(q)}|y - z))| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|x_{\phi(p)} - x_{\phi(q)}\| \, \|y - z\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi définir, pour chaque $y \in E$:

$$L(y) = \lim_{n\to+\infty} \overline{(x_{\phi(n)}|y)} = \lim_{n\to+\infty} (y|x_{\phi(n)}).$$

L'application L ainsi définie de E dans $\mathbb{K}$ est visiblement linéaire et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que la suite (x_n) est bornée, continue. D'après le théorème 5.13, il existe un élément $x \in E$ tel que $L = \phi_x$, ce qui démontre le théorème dans le cas séparable.

Venons-en au cas général. Soit (x_n) une suite bornée de E et soit F l'adhérence du sous-espace vectoriel de E engendré par $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Cet espace est, par construction, un espace de Hilbert séparable. D'après la première partie de la démonstration, il existe une suite extraite (x_{n_k}) et un point $x \in F$ tels que

$$\forall y \in F \lim_{k\to+\infty} (x_{n_k}|y) = (x|y).$$

Comme ceci a lieu aussi bien évidemment si $y \in F^{\perp}$, il suffit maintenant d'appliquer le corollaire 5.10. □

L'existence de l'adjoint d'un opérateur linéaire continu quelconque permet de démontrer la propriété suivante.

Proposition 5.18 *Soit (x_n) une suite de E qui converge faiblement vers x. Alors, pour tout $T \in L(E)$, la suite (Tx_n) converge faiblement vers Tx.*

Démonstration. Pour tout $y \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} (Tx_n|y) = \lim_{n\to+\infty} (x_n|T^*y) = (x|T^*y) = (Tx|y). \quad \square$$

Exercices

1. *Théorème de Lax-Milgram.* Soit E un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire a sur E, que l'on suppose continue et *coercive*, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall x, y \in E \quad |a(x, y)| \leq C\|x\| \, \|y\| \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \quad a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

a. **i.** Démontrer qu'il existe un opérateur linéaire continu T sur E tel que

$$\forall x, y \in E \qquad a(x,y) = (Tx|y).$$

ii. Démontrer que $T(E)$ est dense dans E.

iii. Démontrer que pour tout $x \in E$, $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$. En déduire que T est injectif et que $T(E)$ est fermé.

iv. En déduire que T est un isomorphisme de E sur lui-même.

b. Soit L une forme linéaire continue sur E.

i. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $u \in E$ tel que

$$\forall y \in E \qquad a(u,y) = L(y).$$

ii. On suppose dans cette question que la forme bilinéaire a est symétrique et l'on définit, pour $x \in E$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x).$$

Démontrer que le point u est caractérisé par la condition suivante :

$$\Phi(u) = \min_{x \in E} \Phi(x).$$

2. Soit P un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert E. On suppose que P est une projection ($P^2 = P$). Démontrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :
– P est un projecteur orthogonal ;
– P est auto-adjoint : $P = P^*$;
– P est normal : $PP^* = P^*P$;
– pour tout $x \in E$, $(Px|x) = \|Px\|^2$.

3. Soit E un espace de Hilbert.

a. Démontrer que toute suite faiblement convergente de E est bornée.
Indication. Utiliser le théorème de Banach-Steinhaus (cf. exercice 4.5., p. 68).

b. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E. Démontrer que si la suite (x_n) converge faiblement vers x et si (y_n) converge fortement vers y alors la suite $((x_n|y_n))$ converge vers $(x|y)$. Qu'en est-il si l'on suppose seulement que la suite (y_n) converge faiblement vers y ?

4. Soit (x_n) une suite d'un espace de Hilbert E. Démontrer que si pour tout $y \in E$, la suite $((x_n|y))$ est convergente, alors la suite (x_n) est faiblement convergente.
Indication. Utiliser l'exercice 9, p. 70.

5. Soit K une partie compacte d'un espace de Hilbert E. Démontrer que toute suite de K faiblement convergente est fortement convergente.

6. Démontrer que dans un espace de Hilbert de dimension finie toute suite faiblement convergente est fortement convergente. On pourra donner une démonstration directe n'utilisant pas les exercices 3 et 5.

7. Soit D une partie totale d'un espace de Hilbert E. Démontrer que si (x_n) est une suite bornée de E et si pour tout $y \in D$, $\lim_{n\to+\infty}(x_n|y) = (x|y)$ alors (x_n) converge faiblement vers x. Démontrer que l'hypothèse que (x_n) est bornée est nécessaire (cf. exercice 3a ci-dessus).

8. *Théorème de Banach-Saks*
Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Hilbert E qui converge faiblement vers $x \in E$. Démontrer qu'il existe une suite extraite (x_{n_k}) telle que la suite (y_k) définie par

$$y_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k})$$

converge (fortement) vers x.
Indication. Se ramener au cas où $x = 0$. Dans ce cas, construire (par récurrence) une suite strictement croissante (n_k) d'entiers telle que pour tout $k \geq 2$,

$$|(x_{n_1}|x_{n_k})| \leq 1/k, \quad |(x_{n_2}|x_{n_k})| \leq 1/k, \quad \ldots, \quad |(x_{n_{k-1}}|x_{n_k})| \leq 1/k.$$

Utiliser ensuite l'exercice 3a.

9. **a.** Soient (x_n) une suite faiblement convergente d'un espace de Hilbert et x sa limite faible. Démontrer que x se trouve dans l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication. Utiliser l'exercice précédent.

b. Soit C une partie convexe d'un espace de Hilbert E. Démontrer que C est fermé si et seulement si la limite faible de toute suite de points de C faiblement convergente est un élément de C.

10. *Un cas particulier du théorème du point fixe de Browder.* Soit C une partie non vide, convexe, fermée et bornée d'un espace de Hilbert E.
Soit T une application de C dans C telle que

$$\forall x, y \in C \qquad \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|.$$

a. Soit a un point de C. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in C$, on définit

$$T_n(x) = \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}T(x).$$

Démontrer qu'il existe un unique point $x_n \in C$ tel que $T_n(x_n) = x_n$.
Indication. L'application T_n est strictement contractante.

b. Soit (x_{n_k}) une suite extraite faiblement convergente de la suite (x_n) et soit x sa limite faible (cf. théorème 5.17). Soient $y_n = x_n - a$ et $y = x - a$. Démontrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\|y_n\|^2 \leq \frac{2n-2}{2n-1}\,\Re\mathrm{e}(y_n|y).$$

En déduire que la suite (x_{n_k}) converge fortement vers x, que $x \in C$ et $T(x) = x$.

c. Démontrer que l'ensemble $\{x \in C \text{ t.q. } T(x) = x\}$ est convexe, fermé et non vide.

Indication. Pour démontrer la convexité, choisir $x_0, x_1 \in C$ tels que $T(x_0) = x_0$ et $T(x_1) = x_1$ et, pour $t \in [0,1]$, poser $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$. Démontrer que

$$\|x_0 - x_1\| = \|T(x_t) - x_0\| + \|x_1 - T(x_t)\|.$$

En utilisant les cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz, en déduire que $T(x_t) = x_t$.

11. Soit C une partie convexe, fermée, bornée et non vide d'un espace de Hilbert réel E et soit J une fonction de E dans $\mathbb{R}$ différentiable. On rappelle que J est dite convexe sur C si pour tout couple (u, v) de points de C et pour tout $\theta \in [0,1]$,

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v).$$

Par définition, le *gradient* de J en u, noté $\nabla J(u)$, est l'élément de E associé à la différentielle $J'(u)$ par le théorème de Riesz.

a. Démontrer que J est convexe sur C si et seulement si, pour tout $(u, v) \in C^2$,

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u) | v - u).$$

En déduire en particulier que si J est convexe, alors J est minorée sur C.

b. Démontrer que si J est convexe alors il existe au moins un point $u_* \in C$ tel que

$$J(u_*) = \inf_{u \in C} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} m.$$

On pourra procéder de la manière suivante : Soit (u_n) une suite d'éléments de C telle que $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = m$.

i. Démontrer que (u_n) a une sous-suite (u_{n_k}) faiblement convergente.

ii. Soit u_* la limite faible de (u_{n_k}). Démontrer que $u_* \in C$ (cf. exercice 9).

iii. Démontrer que $J(u_*) = m$.

c. Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, démontrer que l'ensemble $C_0 = \{u_* \in C \ \text{ t.q. } \ J(u_*) = m\}$ est convexe et fermé. Démontrer aussi que $u \in C_0$ si et seulement si, pour tout $v \in C$, $(\nabla J(u) | v - u) \geq 0$.

d. *Un exemple de fonction convexe.* Soient $T \in L(E)$, $\Phi \in E'$ et $J(u) = (Tu|u) + \Phi(u)$. Démontrer que J est convexe sur E si et seulement si l'opérateur $T + T^*$ est auto-adjoint positif.

5.6. Familles orthogonales, bases hilbertiennes On considère ici un espace préhilbertien E. Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de E est dite *famille orthogonale* si pour tous $i \neq j$, $X_i \perp X_j$. Rappelons qu'alors, d'après le théorème de Pythagore, on a, pour toute partie finie J de I,

$$\left\| \sum_{i\in J} X_i \right\|^2 = \sum_{i\in J} \|X_i\|^2.$$

Une conséquence immédiate en est la proposition suivante.

Proposition 5.19 *Une famille orthogonale dont aucun élément n'est nul est libre.*

Démonstration. Soient J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j X_j = 0$. Alors

$$\left\| \sum_{j\in J} \lambda_j X_j \right\|^2 = \sum_{j\in J} |\lambda_j|^2 \|X_j\|^2 = 0,$$

ce qui entraîne clairement que pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$. □

Une famille orthogonale dont tous les éléments sont de norme égale à 1 est dite *famille orthonormale* (ou orthonormée). D'après la proposition précédente, une telle famille est libre. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est dite *totale* si tout élément de E peut être approché de façon arbitrairement proche par une combinaison linéaire d'éléments de cette famille, c'est-à-dire si, pour tout $f \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire $g = \sum_{k=1}^n x_{i_k} e_{i_k}$ telle que que $\|g - f\| \leq \varepsilon$. Une famille orthonormale totale de E est appelée une *base hilbertienne* de E. En dimension finie, une base hilbertienne est tout simplement une base orthonormée.

Nous donnons maintenant quelques exemples fondamentaux.

Exemples

1. Soient $a > 0$ et $C_a^{\mathbb{K}}$ l'espace des fonctions continues périodiques de période a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, muni de sa structure d'espace préhilbertien définie p. 72. On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(x) = e^{2i\pi nx/a}.$$

Il est immédiat que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $C_a^{\mathbb{C}}$. Si $a = 2\pi$, le théorème de Fejér (cf. page 18) montre que cette famille est totale dans $C_a^{\mathbb{C}}$ muni de la norme uniforme. Un simple changement de variables démontre que ceci est vrai pour toute valeur de a. Comme la norme associée au produit scalaire est inférieure ou égale à la norme uniforme, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace préhilbertien $C_a^{\mathbb{C}}$. On en déduit aussitôt que la famille

$$\{1, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}x, \sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{a}x, \ldots, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi n}{a}x, \sqrt{2}\sin\frac{2\pi n}{a}x, \ldots\}$$

est une base hilbertienne de l'espace préhilbertien $C_a^{\mathbb{K}}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Soit E l'espace $\mathcal{E}_\phi^{\mathbb{C}}([0,1])$ défini à l'exemple 4, p. 73, correspondant à la fonction $\phi = 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0,1]$, $e_n(x) = e^{2i\pi nx}$. Comme ci-dessus, on vérifie aisément que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale dans E.

3. Considérons l'espace $E = \ell^2$ (cf. exemple 5, p. 73). On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'élément e_n de E par $e_m(n) = 1$ et $e_m(n) = 0$ si $m \neq n$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment orthonormale. Démontrons qu'elle est totale. Soient pour cela $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ converge, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n>N} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Mais alors

$$\left\| x - \sum_{n\leq N} x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n>N} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ainsi, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E.

Exercice *Fonctions de Haar.* On considère la famille de fonctions $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq 2^n$,

$$H_{2^n+k-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{si} \quad x \in](2k-2)2^{-n-1}, (2k-1)2^{-n-1}[\\ -\sqrt{2^n} & \text{si} \quad x \in](2k-1)2^{-n-1}, 2k.2^{-n-1}[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé de $\mathcal{E}_1^{\mathbb{K}}([0,1])$.

L'essentiel des propriétés des familles orthonormales découle de la proposition élémentaire suivante.

Proposition 5.20 *Soit $\{e_j\}_{j\in J}$ une famille orthonormale finie de E et soit F l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour tout $x \in E$, la projection orthogonale $P_F(x)$ de x sur F est donnée par*

$$P_F(x) = \sum_{j\in J} (x|e_j)e_j.$$

En conséquence,

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{j\in J} (x|e_j)e_j \right\|^2 + \sum_{j\in J} |(x|e_j)|^2.$$

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de démontrer que le vecteur $y = \sum_{j\in J} (x|e_j)e_j$ satisfait aux conditions caractérisant $P_F(x)$ (cf. proposition 5.9). Or il est clair que $y \in F$ et que pour tout $j \in J$, $(x - y|e_j) = 0$, ce qui entraîne $x - y \in F^\perp$. La suite de l'énoncé découle immédiatement du théorème de Pythagore. $\square$

Une première conséquence immédiate, mais importante est l'*inégalité de Bessel* :

Proposition 5.21 (Inégalité de Bessel) *Considérons une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthonormale de E. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 \le \|x\|^2.$$

Précisons le sens de la notation $\sum_{i\in I} a_i$, lorsque, comme c'est le cas ici, les a_i sont des réels positifs. Par définition,

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\subset I, J \text{ fini}} \sum_{j\in J} a_j.$$

En général, l'ensemble d'indices I est soit fini, soit égal à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Dans ces deux derniers cas, on vérifie simplement que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{-\infty} a_{-n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=-n}^{n} a_n.$$

Insistons sur le fait que cette définition et ces égalités ne sont valables que pour des familles (a_i) de réels positifs ou nuls.

Exercice Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2i\pi nx}$ converge uniformément sur $[0,1]$, puis que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2i\pi nx}.$$

Indication. Démontrer que $c_n(f') = 2i\pi n c_n(f)$ et en déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$$

en utilisant l'inégalité de Bessel pour f'.

L'égalité dans l'inégalité de Bessel est caractérisée dans le théorème suivant.

Théorème 5.22 (Bessel-Parseval) *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E ;*
2. $\forall x \in E$ $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2$ *(*égalité de Bessel*) ;*
3. $\forall x, y \in E$ $(x|y) = \sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i|y)$.

Ainsi, si $(e_i)_{i\in I}$ *est une base hilbertienne de* E*, l'application de* E *dans* $\ell^2(I)$ *définie par* $x \mapsto \big((x|e_i)\big)_{i\in I}$ *est une isométrie linéaire.*

Cette isométrie est surjective si et seulement si E *est un espace de Hilbert.*

Démonstration

1. Supposons 1. Alors, pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que la distance de x à l'espace vectoriel engendré par $\{e_j\}_{j\in J}$ est inférieure ou égale à ε. Par la proposition 5.20,

$$\sum_{j\in I} |(x|e_j)|^2 \geq \sum_{j\in J} |(x|e_j)|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2.$$

Faisant tendre ε vers 0 et compte tenu de l'inégalité de Bessel, on obtient 2.

2. Réciproquement, supposons 2. Alors, pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que $\sum_{j\in J} |(x|e_j)|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2$ et donc, par la proposition 5.20,

$$\Big\| x - \sum_{j\in J} (x|e_j) e_j \Big\| \leq \varepsilon.$$

Ceci démontre que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale et donc 1.

3. L'équivalence entre 2 et 3 découle immédiatement de l'expression, dans un espace préhilbertien, du produit scalaire en fonction de la norme (cf. la remarque qui suit le corollaire 5.2).

4. Si l'isométrie est surjective, E est isométrique à $\ell^2(I)$ et donc complet.

5. Supposons enfin que E est un espace de Hilbert et soit $(x_i)_{i\in I}$ un élément de $\ell^2(I)$. Soit $a = \sum_{i\in I} |x_i|^2$. Il existe alors une suite croissante (J_n) de parties finies de I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i\in J_n} |x_i|^2 \geq a - 2^{-n}$ (on se place dans le cas où I est infini, le cas fini étant élémentaire). Soit $u_n = \sum_{i\in J_n} x_i e_i$. Alors, si $n < p$,

$$\|u_p - u_n\|^2 = \sum_{i\in J_p \setminus J_n} |x_i|^2 \leq 2^{-n}.$$

Puisque E est complet, on en déduit que la suite (u_n) converge vers un élément x de E. Or

$$\sum_{i\in \cup_n J_n} |x_i|^2 = a.$$

Donc pour tout $i \notin \cup_n J_n$, $x_i = 0$ et $(x|e_i) = \lim_{n\to+\infty}(u_n|e_i) = 0$. Si $i \in \cup_n J_n$, alors $(x|e_i) = \lim_{n\to+\infty}(u_n|e_i) = x_i$. Ainsi, $(x|e_i) = x_i$ pour tout $i \in I$, ce qui prouve la surjectivité de l'isométrie. □

Remarque. La démonstration des points 1 et 2 montre que, plus précisément, si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale de E, l'égalité

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2$$

caractérise les points x appartenant à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple. Considérons à nouveau l'exemple de l'espace $C_{2\pi}^{\mathbb{C}}$ et de sa famille orthonormée (e_n) définie par $e_n(x) = e^{inx}$ (cf. exemple 1, p. 89). Si $f \in C_{2\pi}^{\mathbb{C}}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$c_n(f) = (f|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des *coefficients de Fourier complexes* de f. Il est vu en classes préparatoires que, pour tout $f \in C_{2\pi}^{\mathbb{C}}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Ceci montre que la famille (e_n) est une base orthonormée de $C_{2\pi}^{\mathbb{C}}$.

Les coefficients de Fourier complexes peuvent être définis de façon analogue pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_1^{\mathbb{K}}([0,1])$ par $c_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx$ (cf. exemple 2, p. 90). L'égalité de Bessel demeure valable dans ce cas, ainsi que l'égalité (1) au sens de la norme de l'espace $\mathcal{E}_1^{\mathbb{K}}([0,1])$.

Exercice

1. Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = f(1)$. Démontrer que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx - \left|\int_0^1 f(x)dx\right|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si f est de la forme $f(x) = \lambda + \mu e^{2i\pi x} + \nu e^{-2i\pi x}$, avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Indication. Utiliser l'égalité de Bessel en considérant la base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$ définie dans l'exemple 2, p. 90.

2. Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx - \left|\int_0^1 f(x)dx\right|^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si f est de la forme $f(x) = \lambda + \mu\cos\pi x$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Indication. Raisonner comme dans la première question en considérant la fonction paire de $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$ qui prolonge f.

3. Soit f une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Démontrer que

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f''(x)|^2 dx$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si f est de la forme $f(x) = \lambda\sin\pi x$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. *Inégalité de Wirtinger.* Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Démontrer que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si f est de la forme $f(x) = \lambda \sin \pi x$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Indication. Prolonger f par imparité.

Exercice : Bases hilbertiennes dans un espace de Hilbert quelconque

Soit E un espace préhilbertien.

1. Démontrer que E contient une famille orthonormale maximale (c'est-à-dire une famille orthonormale qui n'est strictement contenue dans aucune autre).

Indication. On rappelle le *lemme de Zorn* (dû semble-t-il à Kuratowski), qui est une des diverses formes équivalentes de l'axiome du choix :

Soit $\prec$ une relation d'ordre sur un ensemble $\mathcal{A}$ satisfaisant l'hypothèse suivante : toute partie de $\mathcal{A}$ sur laquelle $\prec$ induit une relation d'ordre total est majorée. Alors $\mathcal{A}$ admet un élément maximal.

2. Démontrer que si E est un espace de Hilbert, alors toute famille orthonormale maximale est une base hilbertienne de E. (Utiliser le corollaire 5.11.) Ainsi, avec l'axiome du choix, tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

Index